Math. P. 224 m

R

Stereometrische Anschauungs- und Wissenschaftslehre.

Eine Anleitung zum leichten und gründlichen Studium der Stereometrie.

Bayerische Staatsbibliothek München

Von

Joh. Jos. Ign. Hoffmann,

königl. baier. Schulrathe, Director des Lyceums und der Gymnasial-Anstalt zu Aschaffenburg, Professor der Mathematik und Physik am Lyceum, erstem Professor an dem Forstlehrinstitute, Mitgliede der Wetterauischen Gesellschaft für die gesammte Naturkunde und der kaiserl. Leopoldinisch-Carolinischen Academie der Naturforscher zu Bonn.

Mit acht Steintafeln.

Mainz, 1820.
Bey Florian Kupferberg.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Der

Kaiserl. Leopoldinisch-Carolinischen

Academie

der

Naturforscher

zu Bonn

widmet diese Schrift,

zum

Beweise seiner aufrichtigen Hochachtung,

der Verfasser.

Vorwort.

Die in dem Vorberichte zur zweyten Auflage meiner geometrischen Wissenschaftslehre, Mainz 1818, als eine baldigst zu erscheinende Schrift angekündigte stereometrische Anschauungs- und Wissenschaftslehre ist wegen eingetretener Hindernisse bis jetzt verspätet worden. Durch die dem Verfasser von der Allerhöchsten Stelle übertragene Direction der zahlreich besuchten Gymnasial-Anstalt dahier ist dessen Geschäftskreis, zumal wegen der neu einzuführenden Studien-Organisation, so erweitert worden, daß die bereits damals angefangne Schrift erst jetzt ihre Vollendung erhalten und der Presse übergeben werden konnte.

Plan und Ausführung dieses Lehrbuchs ist auf jene Grundsätze gebaut, welche ich in dem Vorworte zur geometrischen Anschauungslehre, zweyte Auflage, Mainz 1818 und in der Einleitung zur oben bemerkten geometrischen Wissenschaftslehre ausführlicher entwickelt habe. Da aber die Schüler

der Stereometrie den Kreis der Anschauungen und der planimetrischen Lehren bereits abgeschlossen, und hierdurch sowohl Schärfe des geometrischen Blickes, als Gewandtheit im Urtheilen errungen haben, so konnte sich die stereometrische Anschauungslehre, als wirksame Propädeutik zur Stereometrie, auf Darstellung des Wesentlichsten beschränken. Sollte eine weitere Ausführung besonderes Bedürfniß der Schüler seyn, so wird es dem verständigen Lehrer leicht werden, den Faden des Vortrags weiter zu führen.

Aus gleichem Grunde wurden die Beweise in der eigentlichen Stereometrie öfters nur nach ihren Hauptmomenten mehr angedeutet, als mit voller Ausführlichkeit entwickelt. Auch sind keine Citate eingeschalten. Beydes ist solchen Schülern, welche sich durch Selbstdenken die wissenschaftlichen Lehren zu ihrem geistigen Eigenthume machen, entbehrlich; zumal, wenn der Lehrer das Dunkle oder Unvollständige in der Ansicht des Schülers aufzuklären und zu berichtigen weiß.

Da die stereometrische Wissenschaftslehre auf die Anschauung des Körperlichen gegründet ist, so wird ein zweckmäßig einge-

richteter Versinnlichungs-Apparat für Lehrer und Schüler von größter Wichtigkeit. Dieser Apparat muß dem Gange des Lehrvortrags entsprechen und in schicklichen Modellen nachstehende Anschauungen darstellen:

1) Die ebene Fläche, oder die Ebene;
2) Die einfach gekrümmte Fläche;
3) Die doppelt gekrümmte Fläche;
4) Die senkrechte Linie auf der Ebene;
5) Die schiefe Linie auf der Ebene;
6) Den Neigungswinkel der schiefen Linie auf der Ebene;
7) Die senkrechte Ebene auf der Ebene;
8) Die schiefe Ebene auf einer Ebene;
9) Den Neigungswinkel zweyer Ebenen;
10) Die gleichlaufende Ebenen;
11) Die zusammen- und auseinander laufenden Ebenen;
12) Die Nebenwinkel und Scheitelwinkel bey Durchschnittsebenen;
13) Die Durchschnittswinkel gleichlaufender Ebenen durch eine dritte;
14) Den Körperwinkel aus drey Seitenebenen;
15) Den Körperwinkel aus vier, fünf, und mehreren Seitenebenen;
16) Das senkrechte dreyeckige Prisma;
17) Das schiefe dreyeckige Prisma;
18) Das senkrechte Parallelopipedum;
19) Das schiefe Parallelopipedum;
20) Das senkrechte viereckige Prisma;
21) Das schiefe viereckige Prisma;
22) Den senkrechten Cylinder;
23) Den schiefen Cylinder;
24) Die senkrechte dreyeckige Pyramide;
25) Die schiefe dreyeckige Pyramide;
26) Die senkrechte viereckige Pyramide;
27) Die schiefe viereckige Pyramide;

28) Den senkrechten Kegel;
29) Den schiefen Kegel;
30) Die Kugel;
31) Das Tetraëder;
32) Der Würfel;
33) Das Octaëder;
34) Das Icosaëder;
35) Das Dodecaëder.

Obgleich diese Apparate keine nothwendige Beylage zu gegenwärtiger Schrift bilden, so hat der Herr Verleger Sorge getragen, daß dieselbe, auf Verlangen der Käufer, mit ihr abgegeben werden können. Der Preis des kleinern, für den Privatunterricht und zum Selbststudium zweckmäßig verfertigten Apparates, dessen Modelle $2\frac{1}{2}$ Zoll hoch und in einem Kästgen eingeschlossen sind, so wie jener des größern, dessen Modelle eine Höhe von 4 Zollen haben, wird auf das Billigste bestimmt werden.

Mögte dieses Lehrbuch, welches in Verbindung mit meiner geometrischen Anschauungs- und Wissenschaftslehre den Kreis der Elementargeometrie abschliesset, zur kräftigen Geistesbildung ein kleiner Beytrag seyn!

Aschaffenburg im May 1820.

Der Verfasser.

Uebersicht der Schrift.

Einleitung.

Erste Abtheilung.

Die stereometrische Anschauungslehre.

Erster Cursus.

Seite

Stereometrische Grundanschauungen 3

Zweyter Cursus

Stereometrische Grundbegriffe 33

Dritter Cursus.

Stereometrische Bezeichnungen 67

Zweyte Abtheilung

Die stereometrische Wissenschaftslehre.

Erster Cursus.

Stereometrische Vorbereitungslehren 95

I. Die Lage der Ebenen und Linien, gegen Ebenen 95

II. Die Körperwinkel 115

III. Die Construction der Körper 123

Zweyter Cursus.

Seite
Stereometrische Raumverhältnisse 137
I. Die prismatischen Körper 137
II. Die pyramidalischen Körper und die Kugel 154
III. Die Aehnlichkeit der Körper 167

Dritter Cursus.

Stereometrische Berechnungen 177
I. Allgemeine Vordersätze 177
II. Berechnung der Körperräume 182
III. Berechnung der Oberflächen 203

Einleitung.

I. Begriff der Stereometrie.

Der Raum bietet, wie jede Größe, eine doppelte Betrachtnngsweise dar, eine philosophische und eine mathematische. Der Philosoph untersucht die Bedeutung des Raumes in Bezug auf die letzten Gründe der menschlichen Erkenntniß und bestimmt dessen Verhältniß zu der Sinnlichkeit, zum Verstande und zur Vernunft. Alles dieses liegt ausser dem Kreise des Mathematikers. Dieser betrachtet den Raum als eine gegebene, extensive und stetige Größe, deren mannigfaltige Anschauungen und Verhältnisse von ihm klar entwickelt und überzeugend begründet werden. Der Raum stellt sich sogleich als etwas Unendliches dar, woran weder ein Größtes, noch ein Kleinstes zu erkennen ist. Allein dieser endlose Raum kann allseitig begrenzt gedacht werden, und nun heißt er ein geometrischer Körper.

Die Grenzen dieses Körpers, welche höchst mannigfaltig gestaltet seyn können, haben keine körperliche Ausdehnung mehr, sondern erstrecken sich nur nach Länge und Breite hin. Man nennt sie Flächen, deren Grenzen blos nach der Länge ausgedehnt sind und Linien heissen.

Demnach versteht man unter der Stereometrie die mathematische Lehre von den verschiedenen Arten und Raumverhältnissen der Körper. Ihr Gebiet ist, wegen der unendlichen Mannigfaltigkeit möglicher geometrischer Körper, selbst unendlich. Man kann sie in die niedere und höhere theilen. Jene enthält die ersten Elemente und ist der Grund von dieser. Jene beschränkt sich auf die anschauliche und wissenschaftliche Kenntniß der gewöhnlichen prismatischen und pyramidalischen Körper, nebst der Kugel. Diese erweitert ihre Lehren auf Untersuchung der Körper, welche von andere krummen Flächen, als von cylindrischen, kegel- und kugelförmigen umschlossen sind. Nur die Elemente der niedern Stereometrie gehören zum Plane nachfolgender Schrift.

II. Lehrmethode der Stereometrie.

Die Lehrmethode der Stereometrie muß jener der Geometrie überhaupt entsprechen. Da diese, aus der

so fruchtbaren Quelle der Anschauung entsprungen, durch die Kraft des Verstandes zur eigentlichen Wissenschaft erhoben wird, so muß auch die mathematische Körperlehre mit Aufklärung des in ihr Gebiet gehörigen Anschaulichen beginnen, aus diesem deutliche Begriffe bilden und letztere zum systematischen Ganzen verbinden. Stereometrische Anschauungslehre und stereometrische Wissenschaftslehre sind daher die Fundamentaltheile der mathematischen Körperlehre.

III. Zweck der stereometrischen Anschauungslehre.

Die stereometrische Anschauungslehre soll die Fundamental-Objecte der Körperlehre, in naturgemäßer Stufenfolge, dem Auge vorführen, um das Mannigfaltige, was sie darbieten zur sinnlichen Klarheit zu bringen, damit hierdurch der geometrische Blick geübt und gestärkt werde. Diese Anschauungen dienen dem thätigen Verstande zur Bildung der ihnen entsprechenden Begriffe, und erregen sodann das Bedürfniß, körperliche Formen durch Linienverbindungen in der Ebene darzustellen.

IV. Theile der stereometrischen Anschauungslehre.

Hieraus ergeben sich von selbst die drey Abtheilungen der stereometrischen Anschauungslehre.

Der erste Cursus stellt die Elementar-Anschauungen der niedern Stereometrie, vom Einfachen zum Zusammengesetztern fortschreitend, zur sorgfältigen Betrachtung dar. Es soll hier nichts logisch erklärt, sondern Alles aufmerksam beschaut werden.

Im zweyten Cursus erhebt sich die Betrachtung von der Anschauung zum Begriffe. Die ihnen entsprechenden Definitionen treten aber entweder als Sach- oder als Wort-Erklärungen hervor; je nachdem man die Entstehung der erklärten Objecte entweder schon durch die Einfachheit der Anschauung erkennt, oder erst durch die eigentliche Wissenschaftslehre begründen kann.

Durch den dritten Cursus wird die, für den Vortrag der Stereometrie so höchst wichtige Methode erklärt, körperliche Gestalten an Zeichnungen in der Ebene zu erkennen und mit Buchstaben bequem zu bezeichnen.

V. Vortrag der stereometrischen Anschauungslehre.

Der öffentliche oder Privat-Lehrvortrag der stereometrischen Anschauungslehre muß sich nach dem Bedürfnisse der Schüler richten. Da diese durch das Studium der Planimetrie bereits vorgeübt und daher

um so empfänglicher für die Anschauungen der Stereometrie sind, so werden letztere mit geringerm Zeitaufwande sich durchführen lassen. Aber keine Gattung von Schülern kann diese anschauliche Lehre entbehren. Nur muß die Art des Lehrvortrags der bereits errungenen Stufe geistiger Gesammtbildung dieser Schüler entsprechen. Der verständige Lehrer wird daher leicht ermessen, mit welcher Ausführlichkeit und mit welchen Wiederholungen diese Propädeutik zur eigentlichen Stereometrie zu behandeln ist.

VI. Theile der stereometrischen Wissenschaftslehre.

Auch die stereometrische Wissenschaftslehre zerfällt, gleich der Anschauungslehre, in drey Cursus.

Der erste Cursus enthält die zur Stereometrie nöthigen Vorbereitungslehren und entwickelt in drey Abschnitten die verschiedene Lage der Ebenen und Linien gegen die Ebenen, die Entstehung der körperlichen Winkel und dann die Construction der prismatischen und pyramidalischen Körper nebst der Kugel.

Auf diese propädeutische Lehre folgt im zweyten Cursus die Bestimmung der stereometrischen Raumverhältnisse. Er handelt in drey Abschnitten

die Vergleichung der prismatischen Körper, jene der pyramidalischen Körper nebst der Kugel, und dann die Lehre von der Aehnlichkeit der Körper ab.

Im dritten Cursus wird diese Theorie auf die wirklichen Berechnungen angewendet. Nachdem der erste Abschnitt die nöthigen Vordersätze entwickelt hat, folgt in dem zweyten die Bestimmung der Körperräume, und der dritte Abschnitt lehrt die Berechnung der Oberflächen dieser Körper.

Der stereometrischen

Anschauungs-

und

Wissenschaftslehre

erste Abtheilung.

Die stereometrische Anschauungslehre.

Erster Cursus.

Stereometrische Grundanschauungen.

Erster Cursus.

Stereometrische Grundanschauungen.

Vorwort.

Der Zweck dieses ersten Cursus ist, den Anfängern des stereometrischen Studiums jene Grundanschauungen vor das Auge zu führen, welche dieser ganzen Lehre ihr Daseyn geben. Es soll hierin nichts erklärt, sondern alles sehr aufmerksam beschaut werden, damit der Schüler sich von der klaren Anschauung um so leichter und sicherer zu dem deutlichen Begriffe erheben könne. Diese Bemerkung dient sowohl dem Lehrer bey seinem Vortrage, als auch dem gebildetern Schüler zur Leitung des Selbstunterrichtes.

Modell 1.

Ebene Fläche oder Ebene.

Um die Anschauung der ebenen Fläche oder der Ebene aufzuklären, dient am Bequemsten ein Stück dünner, wohl geleimter, durch Schlagen oder Pressen geebneter Pappe. Auch kann statt dessen nie-

wohl geebnetes Brettchen gebraucht werden. Indem der Lehrer die Anschauung der Ebene dem Schüler vor's Auge führt, macht er ihn aufmerksam, daß die Anschauung derselben weder von der verschiedenen Materie, woraus die sinnlich dargestellte Fläche besteht, noch von den Grenzen derselben, welche theils gerade, theils krumme Linien seyn können, abhängig sey.

Modell 2.

Einfach gekrümmte Fläche.

Um die Anschauung dieser krummen Flächen zu versinnlichen, bedient man sich am Besten eines vierekigen Stücks guten Zeichnenpapiers, welches theils cylindrisch, theils conisch zusammengebogen, eine einfach gekrümmte Fläche darstellt. Daß die krummen Flächen von verschiedener Krümmung seyn können, läßt sich eben hierdurch sinnlich nachweisen, indem das Papier auf sehr mannigfaltige Weise zusammengebogen werden kann. Der Lehrer bemerkt auch, daß die auf diese Art entstandene Fläche eine einfach gekrümmte sey.

Modell 3.

Doppelt gekrümmte Fläche.

Zur Versinnlichung der doppelt gekrümmten Fläche, welche man auch allseitig gekrümmt nennt, bedient man sich am Besten der Kugelfläche, welche der Lehrer seinem Schüler zur Anschauung bringt. Auch können die Oberflächen anderer rundlicher Körper zur Erläuterung dieser Anschauung dienen.

Modell 4.

Senkrechte Linie auf der Ebene.

Um die auf der Ebene senkrecht stehenden Linien anschaulich zu machen, bedient man sich am Bequemsten einer Stricknadel, eines geraden Holzstäbchens u. d. gl. welche, in der senkrechten Richtung auf das ebene Brettchen, oder auf die ebene Pappe gestellt, dem Schüler diese Anschauung aufklären. Der Lehrer wird wohl thun, dem Schüler mehrere solcher Stäbchen von verschiedener Länge senkrecht auf die Ebene zu stellen.

Modell 5.

Schiefe Linien auf der Ebene.

Zur Versinnlichung dieser Anschauung dienet der eben bemerkte kleine Apparat, nur mit dem Unterschiede, daß der Lehrer die Dräthe oder Holzstäbchen unter verschiedenen Neigungen gegen die Ebene richtet, wodurch dem Schüler anschaulich wird, daß die Neigung einer schiefen Linie gegen die Ebene, worauf sie steht, bald größer, bald kleiner, ja unendlich mannigfaltig seyn könne.

Modell 6.

Neigungswinkel der schiefen Linie auf der Ebene.

Zur Versinnlichung des Neigungswinkels, welchen schiefe Linien mit der Ebene bilden, worauf sie stehen, dienen am Einfachsten mehrere rechtwinckelige

Dreyeke, welche von starkem Zeichnenpapier, oder von dünner Pappe, oder auch wohl von Holz angefertigt werden. Stellt man diese mit einer ihrer Catheten gehörig in die Ebene, so tritt der Neigungswinkel, welchen die Hypotenuse mit der Ebene bildet, klar vor Augen. Am Bequemsten erhalten diese Dreyeke ungleiche Catheten, wodurch jedes eine doppelte Anschauung gewähren kann.

Modell 7.

Senkrechte Ebene auf einer Ebene.

Um den senkrechten Stand einer Ebene auf der andern anschaulich zu machen, bedient sich der Lehrer am Zweckmäßigsten zweyer Ebenen von Pappe oder dünnem Holze, welche durch gerade Linien begrenzt sind. Wird nun die eine mit einer ihrer Seitenlinien lothrecht auf die andere gestellt, so erhält der Schüler die verlangte Anschauung. Man wird wohl thun, diese Anschauungen dadurch mannigfaltiger zu machen, daß eine Ebene nach und nach mit allen ihren Grenzlinien und zwar nach verschiedenen Richtungen auf die andere lothrecht gestellt werde.

Modell 8.

Schiefe Ebene auf einer Ebene.

Zur Versinnlichung des schiefen Standes einer Ebene auf der andern, bediene man sich der unmittelbar vorher gehenden Modelle, wodurch es leicht wird, den Schüler auf die große Mannigfaltigkeit der schiefen Neigungen aufmerksam zu machen, welche

zwey Ebenen mit einander bilden können. Auch wird hieraus die Anschauung von größerer und geringerer Neigung dem Anfänger aufgeklärt.

Modell 9.

Neigungswinkel zweyer Ebenen.

Eben diese Modelle werden auch die Anschauung des Neigungswinkels zweyer Ebenen aufklären; besonders wenn man eines der vorhin erwähnten rechtwinkeligen Dreyeke auf die eine Ebene senkrecht stellt, und die zweyte Ebene an dessen Hypotenuse anlegt. Stehen beyde Ebenen senkrecht auf einander so ist ihr Neigungswinkel ein rechter, wie vermittelst eben dieses Dreyekes klar wird, wenn man die zweyte Ebene an dessen andere Cathete stellt. Auch erkennt der Anfänger hieraus, daß der Neigungswinkel zweyer Ebenen gegen einander höchst mannigfaltig seyn könne.

Modell 10.

Gleichlaufende Ebenen.

Der Parallelismus zweyer Ebenen gegen einander wird dem Anfänger dadurch aufgeklärt, daß der Lehrer zwey Ebenen von Pappe oder von Holzplättchen in paralleler Lage gegen einander hält, und dieser Anschauung dadurch mehr Mannigfaltigkeit gibt, daß er diese Ebenen bald näher zusammen, bald entfernter aus einander bringt, und ihnen selbst verschiedene Lagen ertheilt. Auch kann man zwey Ebenen sehr bequem auf eine dritte in gleichlaufender Lage neben einander stellen, und hierdurch zeigen, daß der

Parallelismus der Ebenen keinen bestimmten Neigungswinkel derselbeu gegen diese dritte Ebene voraussetze.

Modell 11.

Zusammenlaufende und auseinanderlaufende Ebenen.

Um diese Anschauungen aufzuklären, bedient man sich wiederum der unmittelbar vorhergehenden Modelle. Der Lehrer bringt eine Ebene aus ihrer parallelen Lage gegen die andere, und zeigt nun anschaulich, daß dieselbe nach der einen Richtung mit der andern zusammenlaufend, nach der andern Richtung aber auseinanderlaufend sey. Dieses Zusammenlaufende in der Richtung kann auch bis zum wirklichen Eintreffen der einen Ebene in der andern fortgeführt werden.

Modell 12.

Nebenwinkel und Scheitelwinkel bey Durchschnitts-Ebenen.

Die Nebenwinkel, welche bey dem Durchschnitte zweyer Ebenen entstehen, werden dadurch anschaulich gemacht, daß eine Ebene mit ihrer geradlinigen Grenze mitten in die andere zuerst schief und dann senkrecht gestellt wird, wodurch diese Nebenwinkel im ersten Falle als schiefe, im zweyten als rechte Winkel erscheinen. Auch kann das Wachsthum des einen Nebenwinkels bey der Abnahme des andern, und umgekehrt, hieraus anschaulich werden. Zur

Versinnlichung der Scheitelwinkel kann eine schmälere Ebene mitten durch eine breitere dergestalt gesteckt werden, daß sie an letzterer beyderseits vorstehend, und nach verschiedenen Neigungen drehbar ist. Daß auch hier die Scheitelwinkel der Ebenen gleiche Größe haben, lehrt die unmittelbare Anschauung. Steht eine Ebene auf der andern senkrecht, so ist jeder der vier Winkel ein rechter.

Modell 13.

Durchschnittswinkel gleichlaufender Ebenen durch eine dritte.

Um die verschiedenen Winkel, welche entstehen, wenn zwey gleichlaufende Ebenen von einer dritten Ebene geschnitten werden, zur Anschauung zu bringen, dienet das dem stereometrischen Apparate beyliegende Modell Nro. 13. Man kann durch dasselbe sowohl die beyden innern entgegengesetzten Winkel, als auch alle Paare von innern und äussern Winkeln und von Wechselwinkeln anschaulich machen. Auch ohne diesen Apparat gesehen zu haben, dessen Beschreibung hier zu weitläufig ist, wird sich der verständige Lehrer, durch Verdoppelung des Modells 12, denselben leicht anfertigen können.

Modell 14.

Körperwinkel aus drey Seitenebenen.

Um einen durch drey Seitenebenen begrenzten Körperwinkel dem Schüler anschaulich zu machen, wird ein solcher Winkel aus starkem Zeichnenpapier

verfertigt, woran Folgendes im Einzelnen anzuschauen ist.

1) Ist dieser Körperwinkel von drey Seitenwinkeln umschlossen,

2) Erkennt man an demselben drey Seitenlinien, oder Seitenkanten,

3) Hat dieser Körperwinkel einen Scheitelpunkt, welcher auch der gemeinschaftliche Scheitel seiner drey Scheitelwinkel ist,

4) Schließt dieser Körperwinkel gegen den Scheitelpunkt hin einen körperlichen Raum ein, ist aber nach der entgegengesetzten Seite hin, dem Raume nach unbegrenzt, indem sich jeder seiner drey Seitenwinkel ohne Ende erweitern kann,

5) Fällt in die Augen, daß je zwey dieser Seitenwinkel eine bestimmte Neigung gegen einander haben,

6) Deßgleichen hat jede Seitenkante gegen die aus den beyden übrigen Seitenlinien gebildete Winkelfläche eine gewisse Neigung,

7) Kann man diesen Körperwinkel als einen erhabenen, oder als eine körperliche Ecke, d. h. von Aussen betrachten; deßgleichen auch

8) als einen hohlen Körperwinkel d. h. von Innen ansehen.

Modell 15.

Körperwinkel aus vier, fünf und mehreren Seitenebenen.

Nachdem man sich die zu diesen Anschauungen nöthigen Modelle aus steifem Papiere verfertigt hat,

wird es leicht seyn, sämmtliche bey dem nächstvorhergegangenen Modelle bemerkte Anschauungen auch hier zur Klarheit zu bringen; mit dem Unterschiede, daß hier sowohl die Zahl der Seitenwinkel, als auch jene der Seitenlinien größer ist. Will man den Kreis dieser Anschauungen noch erweitern, so ist es nicht schwer, eben diese Dinge auch bey dem sechs, sieben, achteckigen Körperwinkel durchzuführen, was man dem Lehrer überläßt.

Modell 16.

Das senkrechte dreyeckige Prisma.

Indem man diesen Körper dem Schüler vorzeigt, müssen folgende einzelne Anschauungen gehörig aufgeklärt werden.

1) Anschauung der Grundfläche;
2) Anschauung der Oberfläche;
3) Anschauung der drey Seitenflächen;
4) Anschauung der drey Seitenkanten;
5) Anschauung der sechs Körperwinkel;
6) Anschauung des ganzen Körperraums;
7) Die Grundfläche ist der Oberfläche congruent;
8) Die Grundfläche ist mit der Oberfläche gleichlaufend;
9) Jede der drey Seitenflächen ist ein rechtwinkeliges Parallelogramm;
10) Jede der drey Seitenkanten ist der andern gleich, läuft mit ihr parallel, und steht sowohl auf der Grundfläche, als auf der Oberfläche senkrecht;

11) Drey Körperwinkel liegen an der Grundfläche, drey andere an der Oberfläche. Jeder von ihnen wird durch drey Seitenwinkel eingeschlossen, welche sich in einem gemeinschaftlichen Scheitelpunkte vereinigen. Je zwey dieser Körperwinkel, welche an einer Seitenkante liegen, sind einander vollkommen gleich;

12) Das ganze dreyekige Prisma wird von zwey congruenten Dreyeken und von drey Rechtecken, somit von fünf ebenen Figuren umschlossen, deren Summe die Umfangsfläche des Prisma bilden. Der Umfangslinien sind im Ganzen neun, wovon die drey Seitenkanten unter sich gleich sind, jede Umfangslinie der Grund- und Oberfläche aber der ihr gegenüberstehenden gleich ist;

13) Je zwey Seitenflächen bilden an der gemeinschaftlichen Seitenkante einen Neigungswinkel, welchen man Kantenwinkel nennen kann. Seine Größe erscheint sowohl am Anfange, als am Ende dieser Seitenkante;

14) Jede Seitenfläche steht sowohl auf der Grundfläche, als auf der Oberfläche senkrecht;

15) Jede Seitenlinie dieser Grund- und Oberfläche aber steht auf der daranstoßenden Seitenfläche der Regel nach schief, kann aber auch auf einer senkrecht stehen.

Modell 17.

Das schiefe dreyeckige Prisma.

An dem schiefen dreyeckigen Prisma betrachtet man:

1) Die Grundfläche, die Oberfläche, jede der drey Seitenflächen, jede der drey Seitenkanten, jeden der sechs Körperwinkel, nebst dem ganzen körperlichen Raume;
2) Die Grundfläche ist der Oberfläche congruent und mit ihr gleichlaufend;
3) Jede der drey Seitenkanten ist der andern gleich, und jede steht sowohl auf der Grundfläche, als auch auf der Oberfläche schief;
4) Jede der drey Seitenflächen ist ein schiefwinkeliges Parallelogramm;
5) Jede dieser drey Seitenflächen steht auf der Grundfläche und auf der Oberfläche schief;
6) Der ganze Körper ist von drey Parallelogrammen und von zwey congruenten Dreyecken umschlossen, welche zusammen seine Umfangsfläche bilden
7) Desgleichen befinden sich an diesem Körper neun; Grenzlinien, worunter sich drey Paare gleicher Linien befinden. Die drey übrigen sind ebenfalls unter sich gleich;
8) Jede der zwey Seitenflächen bilden an jeder gemeinschaftlichen Kante einen Neigungswinkel, welchen man auch hier den Kantenwinkel nennt.

Modell 18.

Das senkrechte Parallelopipedum.

An dem senkrechten Parallelopipedum wird betrachtet:

1) Dessen Grundfläche, welche ein Parallelogramm ist, und mit der Oberfläche sowohl parallel läuft, als auch derselben congruent ist;

2) Die vier Seitenflächen, wovon jede ein Rechteck ist. Jede derselben ist der gegenüberliegenden congruent und läuft mit ihr parallel;

3) Das ganze Parallelopipedum ist demnach von sechs Parallelogrammen umschlossen, wovon je zwey gegenüberstehenden sowohl congruent sind, als auch mit einander parallel laufen. Jede dieser Seitenflächen kann Grundfläche, und die ihr gegenüberliegende die Oberflache werden, wenn man den Körper auf eine dieser Seitenflächen stellt;

4) Das senkrechte Parallelopipedum hat vier Seitenkanten, welche sämmtlich einander gleich und mit einander parallel sind. Auch steht jede sowohl auf der Grundfläche, als auf der Oberfläche lothrecht;

5) Dieser Körper zeigt acht Körperwinkel, wovon vier an den Scheitelpunkten der Grundfläche, die vier andern dagegen an den Scheitelpunkten der Oberfläche liegen. Jeder dieser Körperwinkel ist von drey Seitenwinkeln begrenzt, welche sämmtlich rechte sind. Sämmtliche acht Körperwinkel sind, einzeln genommen, einander gleich;

6) Jeder der vier Kantenwinkel ist ein rechter und jede Kante steht auf den, an ihren Endpunkten liegenden beiden Seitenflächen lothrecht;

7) Die Zahl sämmtlicher Seitenlinien ist zwölf, wovon vier unter sich, die übrigen acht aber paarweise einander gleich sind.

Modell 19.

Das schiefe Parallelopipedum.

An dem schiefen Parallelopipedum kann Folgendes zur Anschauung gebracht werden:

1) Seine Grundfläche und seine Oberfläche, deren jede ein Parallelogramm ist, parallel und congruent dem gegenüberliegenden;

2) Seine vier Seitenflächen, welche meist schiefwinkelige Parallelogramme sind; doch können zwey gegenüberstehende auch Rechtecke seyn. Die zwey gegenüberliegenden sind congruent und gleichlaufend. Der ganze Körper wird demnach von sechs Parallelogrammen eingeschlossen, wovon je zwey gegenüberstehende parallel und congruent sind;

3) Die vier Seitenkanten, welche unter sich gleich und parallel sind, aber sowohl auf der Grundfläche als auf der Oberfläche nicht senkrecht, sondern schief stehen;

4) Die acht Körperwinkel, deren vier an der Grundfläche und vier an der Oberfläche liegen. Jeder von ihnen wird von drey Seitenwinkeln umschlossen;

5) Auch kann man die vier Kantenwinkel betrachten, und die Neigungen der Grund- und Oberflächen gegen jede der an ihr anliegenden vier Seitenflächen;

Modell 20.

Das senkrechte viereckige Prisma.

Bey dem senkrechten viereckigen Prisma kömmt Folgendes zur Anschauung:

1) Die Grundfläche und die ihr congruente und parallel laufende Oberfläche, deren jede kein Parallelogramm ist;

2) Die vier Seitenflächen, deren jede zwar ein rechtwinkeliges Parallelogramm ist, aber der ihr gegenüberstehenden nicht congruent zu seyn braucht;

3) Die vier Seitenkanten sind unter sich gleich, auch parallel und stehen auf Grund- und Oberfläche lothrecht;

4) Die acht Körperwinkel, wovon vier an den Scheitelpunkten der Grundfläche, die vier übrigen an den Scheitelpunkten der Oberfläche liegen. Jeder von ihnen ist durch drey Seitenwinkel begrenzt;

5) Auch lassen sich die vier Kantenwinkel betrachten, welche sowohl rechte als spitze und stumpfe Winkel seyn können. Deßgleichen kann man die Neigungen der Grund- und Oberfläche gegen jede der vier Seitenflächen anschauen.

Modell 21.

Das schiefe viereckige Prisma.

Das schiefe viereckige Prisma bietet mit dem senkrechten des vorigen Modells ähnliche Anschauungen dar. Zum Unterschiede bemerkt man aber bald, daß die vier Seitenkanten, welche auch hier unter sich gleich und parallel sind, gegen die Grund- und Oberfläche eine schiefe Neigung haben. Die übrigen Anschauungen hat dieser Körper mit dem vorigen gemein.

Modell 22.

Der senkrechte Cylinder.

Der senkrechte Cylinder zeigt:

1) Einen Kreis als Grundfläche, und einen ihm congruenten und parallel laufenden Kreis als Oberfläche;

2) Eine einfach gekrümmte Umfangsfläche oder Seitenfläche;

3) Einen körperlichen Raum, welcher von dieser Seitenfläche, nebst der Grund- und Oberfläche eingeschlossen ist;

4) Eine Gesammtoberfläche, welche aus der Summe der Seitenfläche und der beyden Kreisflächen besteht;

5) Eine Achse, deren Verlängerungen über den Mittelpunkt der Grund- und Oberfläche hervortreten, um in diesem Modelle die Anschaulichkeit zu befördern;

6) Diese Achse steht sowohl auf der Grundfläche, als auf der Oberfläche lothrecht.

Modell 23.

Der schiefe Cylinder.

An dem schiefen Cylinder bemerkt man:

1) ebenfalls zwey congruente und parallellaufende Kreisflächen, wovon die eine Grundfläche, die andere Oberfläche heißt;

2) Eine einfach gekrümmte, in sich selbst zurücklaufende Fläche, welche Umfangs- oder Seitenfläche genennt wird;

3) Die über dem Mittelpunkte der kreisförmigen Grund- und Oberfläche hervorragende, mitten durch den Cylinder gehende gerade Linie, welche seine Achse heißt;

4) Sieht man, daß diese Achse sowohl mit der Grundfläche, als auch mit der Oberfläche schiefe Winkel bildet.

Modell 24.

Die senkrechte dreyeckige Pyramide.

Die senkrechte dreyekige Pyramide bietet Folgendes der Betrachtung dar:

1) Ein gleichseitiges Dreyeck als Grundfläche dieses Körpers.

2) Drey gleichschenkelige Dreyecke, welche einander congruent sind und in ihrer Vereinigung die gesammte Seitenfläche der Pyramide bilden. Jedes einzelne dieser Dreyecke wird auch Seitenfläche genannt;

3) Die Spitze der Pyramide, welche ihrer Grundfläche gegenüber liegt;

4) Die vier Seitenkanten, deren jede der andern gleich ist;

5) Die über die Spitze und über den Mittelpunkt der Grundfläche hervortretende gerade Linie, als Achse der Pyramide;

6) Diese Achse steht lothrecht auf der Grundfläche;

7) Erblickt man vier Körperwinkel, wovon drey an den Grenzen der Grundfläche, der vierte an der Spitze liegt. Jene drey sind, einzeln genommen, einander gleich; alle vier aber werden, einzeln betrachtet, von drey Seitenwinkeln gebildet;

8) Die Kanten stehen schief auf der Grundfläche, haben aber unter sich einerley Neigung dagegen;

9) Auch bildet jede der drey Seitenflächen mit der Grundfläche einen spitzen Neigungswinkel, wovon jeder dem andern gleich ist;

10) Ferner ist jede Seite der Grundfläche gegen jede an ihren zwey Endpunkten liegende Seitenfläche schiefwinkelig geneigt;

11) Die Zahl aller ebenen Winkel, welche die vier Körperwinkel umgrenzen, ist drey mal vier, oder zwölf;

12) Die Gesammtfläche des ganzen Körpers besteht aus der Summe seiner vier Umfangsflächen, welche zusammen den Körperraum der Pyramide begrenzen;

13) Die Zahl sämmtlicher, an den Grenzen des Körpers liegenden geraden Grenzlinien ist sechs.

Modell 25.

Die schiefe dreyeckige Pyramide.

An diesem Körper betrachtet man:

1) Seine dreyeckige Grundfläche;

2) Seine drey dreyseitige Seitenflächen;

3) Seine Spitze;

4) Seine drey Seitenkanten, deren jede, gleich der Achse, auf der Grundfläche schief steht;

5) Die vier Körperwinkel, deren jeder von drey ebenen Winkeln gebildet wird; so, daß auch hier die Zahl sämmtlicher ebenen Winkel drey mal vier, oder zwölf beträgt;

6) Die Seitenkanten sind ungleich an Größe, und verschieden gegen die Grundfläche geneigt;

7) Eben so bilden die drey Seitenflächen verschiedene Winkel mit der Grundfläche;

8) Die ganze Pyramide ist von vier Dreyecken umschlossen, deren Summe ihre gesammte Oberfläche bildet;

9) Auch kann der Körperraum dieser Pyramide besonders angeschaut werden;

10) Denkt man sich diese Pyramide auf irgend eine ihrer Seitenflächen gelegt, so wird diese zur Grundfläche und der Scheitelpunkt des ihr gegenüberstehenden Körperwinkels zur Spitze;

Modell 26.

Die senkrechte viereckige Pyramide.

Die senkrechte viereckige Pyramide gewährt folgende Anschauungen:

1) Das Rechteck (oder ein Quadrat) als Grundfläche;

2) Ihre vier Seitenflächen, wovon zwey gegenüberstehende congruent sind;
3) Ihre Spitze;
4) Die vier Seitenkanten, welche unter sich gleich sind;
5) Die Achse, welche über der Spitze und über dem Mittelpunkte der Grundfläche hervorragt, und auf letzterer lothrecht steht;
6) Die vier Körperwinkel an den Scheitelpunkten der Grundfläche, und den fünften an der Spitze. Da jeder von jenen drey ebene Winkel, dieser aber vier ebene Winkel zu Grenzflächen hat, so beträgt die Summe aller ebenen Winkel an dieser Pyramide im Ganzen sechszehn;
7) Die Kanten stehen schief auf der Grundfläche, so wie auch die vier Seitenflächen;
8) Die Gesammtfläche dieser Pyramide besteht aus einem Rechtecke (oder Quadrate) und aus zwey Paaren von congruenten Dreyecken;
9) Was diese fünf Grenzflächen umschließen, ist der Körperraum der Pyramide.

Modell 27.

Die schiefe viereckige Pyramide.

An der schiefen viereckigen Pyramide lassen sich alle Anschauungen der senkrechten vierseitigen Pyramide nachweisen. Das Unterscheidende beyder ist:

1) Vier Seitenkanten, welche nicht von gleicher Größe sind, und mit der viereckigen Grundfläche verschiedene Neigungswinkel bilden;

2) Vier Dreyecke, als Seitenflächen, welche weder congruent, noch gegen die Grundfläche gleich geneigt sind.

Modell 28.

Der senkrechte Kegel.

Der senkrechte Kegel gibt Stoff zu folgenden Anschauungen:

1) Ein Kreis als Grundfläche;

2) Eine krumme, in sich selbst zurücklaufende, in einem Punkte sich endigende Seitenfläche;

3) Eine der Grundfläche gegenüberstehende Spitze;

4) Die über die Spitze und über den Mittelpunkt der Grundfläche hervortretende gerade Linie, oder die Achse des senkrechten Kegels;

5) Diese Achse steht lothrecht auf der Grundfläche;

6) Die krumme Seitenfläche wird gegen die Spitze hin mehr, gegen die Grundfläche zu weniger gekrümmt.

7) Die Gesammtfläche dieses Kegels ist die Summe seiner Grund- und Seitenfläche. Was diese Flächen einschließen, ist der Körperraum des Kegels.

Modell 29.

Der schiefe Kegel.

An dem schiefen Kegel unterscheidet man:

1) Seine kreisförmige Grundfläche;
2) Seine in sich selbst zurücklaufende, sich in einem Punkte endigende, krumme Seitenfläche;
3) Die der Grundfläche gegenüber liegende Spitze;
4) Die Achse, welche mit der Grundfläche schiefe Winkel bildet;
5) Die Gesammtfläche, welche aus der Seitenfläche und aus der Grundfläche besteht;
6) Den Körperraum, welchen diese Flächen umschließen;
7) Die verschiedene Neigung der Seitenfläche gegen die Grundfläche;

Modell 30.

Die Kugel.

An der Kugel unterscheidet man:

1) Die allseitig gekrümmte, durchaus in sich selbst zurücklaufende Oberfläche;
2) Den von dieser Oberfläche allseitig eingeschlossenen Körperraum;
3) Einen Punkt, welchen man sich in der Mitte des kugelförmigen Raumes denkt, und welcher Mittelpunkt der Kugel heißt;

4) Eine gerade Linie, welche man sich durch den Mittelpunkt der Kugel bis an ihre Oberfläche beyderseits verlängert vorstellt. Man nennt sie den Durchmesser der Kugel;

5) Eine gerade Linie aus dem Mittelpunkte nach der Kugelfläche gezogen, welche Halbmesser der Kugel heißt;

6) Denkt man sich den Durchmesser der Kugel beyderseits über ihre Oberfläche verlängert, so nennt man diese Linie die Achse der Kugel; die Punkte aber, in welchen der Durchmesser die Kugelfläche schneidet, die Pole der Kugel;

7) Auch kann man die Kugelfläche von ihrer äussern und von ihrer innern Seite sich denken. Im ersten Falle heißt sie die erhabene, im zweyten die hohle Kugelfläche.

Modell 31.

Das Tetraëder.

An dem Tetraëder unterscheidet man folgende Anschauungen:

1) Die vier Seitenflächen, welche es begrenzen, deren jede ein gleichseitiges Dreyeck ist, congruent jedem der drey übrigen;

2) Die vier Körperwinkel, wovon drey an der Grundfläche liegen, der vierte aber sich an der Spitze befindet. Jeder dieser vier Körperwinkel wird von drey ebenen Winkeln umschlossen, welche,

einzeln genommen, alle gleich sind. Sämmtliche Körperwinkel sind unter sich congruent;

3) Die sechs Seitenkanten, deren jede der andern gleich ist. Auch bildet jede mit den beyden Flächen, welche an ihren Endpunkten liegen, gleiche Neigung;

4) Jede Seitenfläche ist gegen jede der drey an ihr anliegenden unter einerley Winkel geneigt;

5) Das Tetraëder gewährt immer die nämliche Anschauung, man mag irgend eine Seitenfläche, welche man will, zur Grundfläche wählen;

6) Das Tetraëder erkennt man als eine Gattung der dreyseitigen Pyramiden. Auch ist dieser Körper eine senkrechte Pyramide, und die geraden Linien von irgend einer Spitze auf die Mitte der ihr gegenüberliegenden Grundfläche gezogen, stehen auf dieser Grundfläche lothrecht und sind alle einander gleich;

7) Das Tetraëder erscheint sonach als ein regelmäßiger Körper.

Modell 32.

Der Würfel.

Der Würfel gewährt nachfolgende Anschauungen:

1) Eine quadratische Grundfläche;

2) Eine ihr congruente Oberfläche;

3) Vier quadratische Seitenflächen, welche sowohl unter sich congruent sind, als auch jede derselben der Grund- und Oberfläche congruent ist;

4) Die gesammte Umfangsfläche des Würfels besteht daher aus acht gleichen Quadraten;

5) Der Würfel zeigt ferner acht Körperwinkel, wovon vier an den Grenzen der Grundfläche, die vier andern an den Grenzen der Oberfläche liegen;

6) Jeder dieser acht Körperwinkel ist von drey rechten Winkeln eingeschlossen, und jeder ist jedem andern gleich;

7) Der Würfel zeigt zwölf Seitenkanten, welche alle, einzeln genommen, einander gleich sind. Auch steht jede von ihnen auf den beyden an ihren Enden liegenden Quadraten senkrecht;

8) Deßgleichen erkennt man zwölf Kantenwinkel, deren jeder ein rechter ist;

9) Die Anschauung des Würfels zeigt, daß er eine Gattung der senkrechten Parallelopipeden ist;

10) Auch ist klar, daß jede Umfangsfläche als Grundfläche des Würfels betrachtet werden kann, und daß die Anschauung des Würfels hierbey immer die nämliche bleibt. In dem Würfel erkennt man daher ebenfalls einen durchaus regelmäßigen Körper.

Modell 33.

Das Octaëder.

Die Anschauung des Octaëders gewährt folgende einzelne Betrachtungen:

1) Ist dieser Körper von acht Seitenflächen begrenzt. Jede ist ein gleichseitiges Dreyeck, welches jedem andern congruent ist;

2) Erkennt man an dem Octaëder sechs Körperwinkel, deren jeder von vier ebenen Winkeln gebildet wird. Die Anschauung lehrt, daß jeder derselben jedem andern gleich sey;

3) Auch erblickt man an dem ganzen Körper zwölf Kanten, welche, einzeln genommen, einander gleich sind;

4) Ferner sind die Neigungswinkel je zweyer an diesen Kanten anliegenden Seitenflächen einander gleich;

5) Jeder Seitenfläche steht eine ihr congruente gegenüber, so wie jeder Spitze eine Spitze gegenüber liegt;

6) Eine gerade Linie, welche man sich von einer dieser Spitzen zur gegenüberliegenden denkt, steht auf der zwischen beyden liegenden, den ganzen Körper in zwey gleiche Theile theilenden, quadratischen Theilungsfläche lothrecht;

7) Denkt man sich das Octaëder nach dieser quadratischen Grenzfläche durchschnitten, so erhält man zwey senkrechte viereckige Pyramiden, deren eine der andern vollkommen congruent ist;

8) Das Octaëder erscheint ebenfalls als ein regelmäßiger Körper.

Modell 34.

Das Icosaëder.

Die Betrachtung des Icosaëders gewährt folgende Resultate:

1) Ist dieser Körper von zwanzig gleichseitigen Dreyecken eingeschlossen, deren jedes jedem andern congruent ist;

2) Erblickt man an den Grenzen des ganzen Körpers zwölf Körperwinkel;

3) Jeder von ihnen ist durch fünf gleiche ebene Winkel gebildet, und die Anschauung lehrt, daß jeder derselben jedem einzelnen gleich ist;

4) Rings um den ganzen Körper her liegen zwanzig Seitenkanten, welche, einzeln genommen, alle gleich sind;

5) An diesen Kanten liegen zwanzig Kantenwinkel, deren jeder dem andern gleich ist;

6) Nimmt man eine der dreyeckigen Umfangsflächen als Grundfläche des Körpers an, so steht ihr eine congruente Fläche als Oberfläche entgegen. Auch hat jeder Scheitelpunkt einen ihm gegenüberliegenden Scheitel;

7) Endlich lehrt die Anschauung, daß alle gerade Linien, von einem Scheitelpunkte nach dem ihm gegenüberliegenden gezogen, einander gleich sind; so wie auch daß das Icosaëder in zwey einander durchaus gleiche senkrechte fünfeckige Pyramiden, und in einen Körper getheilt werden könne, dessen Grund- und Oberflächen regelmäßige Fünfecke sind, und dessen Seitenfläche eine Verbindung von zehn congruenten und gleichseitigen Dreyecken ist.

Modell 35.

Das Dodecaëder.

An dem Dodecaëder erkennt man Folgendes:

1) Zwölf congruente regelmäßige Fünfecke als Seitenflächen, so daß jeder einzelnen dieser Flächen eine andere derselben entgegen steht;

2) Findet man an dem ganzen Körper zwanzig Körperwinkel, deren jeder von drey, einzeln genommen, gleichen ebenen Winkeln eingeschlossen ist;

3) Auch liegen an den Grenzen des Körpers zwanzig Kanten, und eben so viele Kantenwinkel, wovon sowohl jene als diese, einzeln genommen, unter sich gleich sind;

4) Ferner sind die Neigungswinkel, welche jede Kante mit den beyden an ihren Endpunkten liegenden congruenten Fünfecken bildet, einander gleich;

5) Gewährt dieser Körper, man mag ihn auf was immer für eine Seitenfläche stellen, vollkommen denselbigen Anblick, wodurch er für die Anschauung als ein regelmäßiger Körper erscheint.

Schlußwort.

Mit diesen Betrachtungen ist der Cyclus der stereometrischen Grundanschauungen abgeschlossen. Er soll dazu dienen, dem Schüler jene Elemente aufzuklären, worauf das ganze Lehrgebäude

der Stereometrie sich am Ende stützet. Da die Mannigfaltigkeit dieser Anschauungen sehr groß ist, so konnten in dem eben vollendeten Cursus nur jene betrachtet werden, welche für die folgende Darstellung sich vorzüglich wichtig zeigen. Es bleibt daher dem verständigen Lehrer, oder auch dem schon etwas gebildeten Schüler, überlassen, den Kreis dieser Grundlehren nicht sowohl nach Aussen zu vermehren, als nach Innen mehr zu erweitern; was auch noch in der Folge dieser Anleitung geschehen wird.

Der

stereometrischen Anschauungslehre

zweyter Cursus.

Stereometrische Grundbegriffe.

Zweyter Cursus.

Stereometrische Grundbegriffe.

Vorwort.

Nachdem der Schüler durch den vorigen Cursus die wichtigsten Grundanschauungen der Stereometrie sich zur Klarheit gebracht hat, so muß nun der Uibergang vom Beschauen zum Begreifen, d. h. von der Anschauung zum Begriffe eingeleitet werden. Diese Betrachtung erhebt den Anfänger zu einer höhern Stufe, indem er vom Einzelnen zum Allgemeinen emporsteigt, und Dasjenige nach seinen wesentlichen Merkmalen erkennen lernt, was ihm die Anschauung im Ganzen dargeboten hat. Für diesen Cursus ist der Unterschied zwischen Sach- und Worterklärungen von Wichtigkeit. Jene gewähren uns nämlich eine überzeugende Einsicht in die Entstehung des zu erklärenden Gegenstandes; diese aber bezeichnen nur den Begriff, welchen man mit einem gewissen Worte verbindet. Jene klären die Sache, diese das Wort auf. Daher verdienen auch jene vor diesen den Vorzug. Der verständige Lehrer wird den Schüler bey den in diesem Cursus folgenden

Erklärungen auf diesen Unterschied jedesmal aufmerksam machen; mit der Bemerkung, daß manche Worterklärungen erst durch die wissenschaftlichen Lehren der Stereometrie ihren eigentlichen Werth erhalten können. Uibrigens befolgt dieser zweyte Cursus die Reihenfolge des ersten, und bedient sich auch zur Aufklärung und Versinnlichung der Begriffe nochmals derselbigen Modelle.

Modell 1.

Erklärung der ebenen Fläche, oder der Ebene.

Die Anschauung der ebenen Fläche, oder der Ebene wird dadurch zum Begriffe erhoben, daß man in ihr einen Flächenraum erkennt, in welchem von jedem angenommenen Punkte zu jedem andern eine gerade Linie möglich ist, welche ganz in sie hinein fällt. Die Ebene ist daher eine Fläche, welche die Eigenschaft hat, daß gerade Linien, nach allen Richtungen in sie gelegt, gänzlich in dieselbe eintreffen. Die Ebene erkennt man hiedurch als eine durchaus gerade Fläche, und so wie die Linien theils gerade, theils krumme sind, so tritt auch der Unterschied des Geraden und Krummen bey den Flächen hervor. Der Begriff der geraden Fläche, oder der Ebene ist übrigens sehr einfach. Er grenzt so nahe an die Anschauung, und ist so innig mit ihr verbunden, daß derselbe ohne diese Anschauung nie zur Klarheit gebracht werden könnte. Man erkennt hieraus zugleich den fortschreitenden Stufengang geometrischer Erkenntnisse, welche,

von der Anschauung ausgehend, sich durch eine Reihenfolge beynahe einfacher Begriffe allmählig zum Zusammengesetztern erheben.

Modell 2.

Erklärung der einfach gekrümmten Fläche.

Unter einer krummen Fläche versteht man jene, in welche ein gerade Linie nicht nach allen Richtungen ganz und gar gelegt werden kann. Die Oberfläche des Kegels erläutert dieses. Auch diese Erklärung grenzt so nahe an die Anschauung, daß sie ohne letztere niemals klar werden könnte. Der Begriff der krummen Fläche ist nämlich auch ein solcher, der wegen seiner Einfachheit keine Darlegung vieler Merkmale zuläßt. Man könnte auch sagen, eine krumme Fläche sey jene, welche nicht gerade, oder keine ebene ist, wobey die Erklärung des Krummen den Begriff des Geraden schon voraussetzt.

Eine einfach gekrümmte Fläche wird jene genannt, in welche gerade Linien nach gewissen Richtungen ganz und gar hineinfallen können, nach andern Richtungen aber nicht. Die krumme Seitenfläche des Kegels ist eine einfach gekrümmte Fläche. Wenn man sich nämlich von seiner Spitze nach einem in der Peripherie der Grundfläche willkührlich gewählten Punkte eine gerade Linie denkt, so fällt dieselbe ganz und gar in die Keg..fläche. Man nennt sie die Seite des Kegels. Denkt man sich dieselbe um die unbewegliche Spitze und in steter Berührung mit dem Umfange

der Grundfläche, um letztere drehbar, so erzeugt sie durch diese Bewegung nach der Breite die krumme Kegelfläche. Die Kegelfläche ist daher, nach diesen Seitenrichtungen des Kegels, eine gerade Fläche zu nennen. Heißt man diese Richtung ihre Länge, so ist die Kegelfläche nach der Länge eine gerade, aber nach jeder Richtung der Breite eine krumme Fläche, weil nach allen andern Richtungen eine gerade Linie niemals ganz in diese Fläche fällt.

Auch die Umfangsfläche des Cylinders ist eine einfach gekrümmte, da man sich auch hier eine Seite des Cylinders, wie vorhin eine Seite des Kegels, denken kann, welche als gerade Linie erscheint. Nach jeder Seitenrichtung aber ist die Cylinderfläche eine gekrümmte.

Modell 3.

Erklärung der doppelt gekrümmten Fläche.

Eine Fläche, welche nach der Länge und Breite gekrümmt ist, wird eine doppelt gekrümmte genannt. Man erkennt sie daran, daß gerade Linien nach keiner Richtung ganz in sie hinein fallen können. Die Oberfläche einer Kugel, oder eines andern rundlichen Körpers erläutert dieses. Weil die Natur der Fläche in ihrer Länge und Breite besteht, die doppelt gekrümmte Fläche aber sowohl nach Länge als Breite gekrümmt ist, so muß diese Krümmung eine allseitige, das heißt eine solche seyn, welche sich nach ihrer ganzen Ausdehnung erstreckt. Daher können die dop-

pelt gekrümmten Flächen mit Recht allseitig gekrümmte genennt werden.

Modell 4.

Erklärung der senkrechten Linie auf der Ebene.

Eine Linie steht auf der Ebene senkrecht oder lothrecht, wenn sie mit jeder geraden Linie, welche aus ihrem Berührungspunkte mit der Ebene, in dieser Ebene gezogen wird, einen rechten Winkel bildet. Diese Erklärung ist eine blose Worterklärung, weil der Schüler hieraus nicht erkennt, wodurch es möglich sey, eine gerade Linie nach dieser Forderung auf einer Ebene aufzustellen. Die gründliche, streng wissenschaftliche Rechtfertigung dieser Erklärung gehört in die stereometrische Wissenschaftslehre. Demungeachtet ist es rathsam, daß der Lehrer mancherley Linien in der Ebene construirt, und dem Anfänger den Sinn dieser Erklärung hierdurch anschaulich macht.

Modell 5.

Erklärung der schiefen Linie auf der Ebene.

Eine Linie steht schief auf der Ebene, wenn sie nicht lothrecht darauf ist, d. h. wenn sie nicht mit allen, durch ihren Berührungspunkt in der Ebene gezogenen geraden Linien rechte Winkel bildet. Indem der Lehrer die Anschauung der schiefen Linie hiebey wiederholt, macht er den Schüler aufmerksam, daß eine gerade Linie mit einer in der Ebene gezogenen gera-

den beyderseits rechte Winkel bilden könne, ohne auf ihr senkrecht zu stehen.

Modell 6.

Erklärung des Neigungswinkels einer geraden Linie gegen die Ebene.

Unter dem Neigungswinkel einer geraden Linie gegen eine Ebene versteht man denjenigen Winkel, welcher entsteht, indem man aus einem Punkte dieser Linie ein Loth auf die Ebene zieht, und den Punkt, in welchem es eintrifft, mit dem Berührungspunkte der Linie und der Ebene durch eine gerade Linie verbindet. Bey schief stehenden Linien ist dieser Neigungswinkel ein spitzer; bey senkrecht stehenden aber fällt das zu ziehende Loth selbst in diese Linien, und der Neigungswinkel ist ein rechter. Aus dieser Erklärung erhellet, daß sie keine Sach-, sondern eine Worterklärung sey, weil die Construktion des Neigungswinkels jene des Loths auf die Ebene voraussetzt; eine Aufgabe, welche erst in der stereometrischen Wissenschaftslehre gründlich aufgelößt werden kann.

Indem der Lehrer den Sinn dieser Erklärung an dem Modelle aufklärt, wird er auch im Stande seyn, die Veränderlichkeit dieses Neigungswinkels nachzuweisen, und den Schüler aufmerksam zu machen, daß derselbe von sehr veränderlicher Größe seyn kann.

Modell 7.

Erklärung der senkrechten Ebene auf einer Ebene.

Eine Ebene steht auf einer andern senkrecht, wenn ihr Neigungswinkel ein rechter ist. Dieser

Neigungswinkel wird aber folgendergestalt bestimmt. Da der gemeinschaftliche Durchschnitt zweyer Ebenen eine gerade Linie ist, so kann man in derselben einen beliebigen Punkt wählen, und aus ihm auf diese Durchschnittslinie zwey Lothe errichten, wovon das eine in die eine Ebene, das andere aber in die andere Ebene fällt. Der von diesen beyden Lothen gebildete Winkel ist der Neigungswinkel der Ebene.

Diese Erklärung ist in sofern eine Sacherklärung, als die ebene Geometrie das Errichten senkrechter Linien gelehrt hat. Aber wenn man daraus die Folgerung ableiten will, daß bey dem senkrechten Stande einer Ebene auf der andern jeder beliebig construirte Neigungswinkel ein rechter sey, so muß dieses allerdings bewiesen werden. Uebrigens ist klar, daß der lothrechte Stand einer Ebene auf der andern gegenseitig sey; so, daß wenn die Ebene A auf der Ebene B senkrecht ist, auch die Ebene B auf A lothrecht steht.

Modell 8.

Erklärung der schiefen Ebenen auf einer Ebene.

Zwey Ebenen stehen schief auf einander, wenn ihr Neigungswinkel ein schiefer ist. Man könnte auch sagen: wenn sie nicht lothrecht auf einander stehen. Indem man diesen Begriff abermals mit der Anschauung zweyer schief auf einander stehenden Ebenen verbindet, ist es zweckmäßig, sowohl auf den spitzen als auf den stumpfen Neigungswinkel, und auf ihre verschiedene Größe aufmerksam zu machen.

Modell 9.

Erklärung des Neigungswinkels zweyer Ebenen.

Diese Erklärung ist bereits in dem unmittelbar Vorhergegangenen enthalten, und kann nunmehr so dargestellt werden. Der Neigungswinkel zweyer Ebenen ist derjenige Winkel, welcher entsteht, wenn man aus einem in ihrem gemeinschaftlichen Durchschnitte willkührlich angenommenen Punkte auf diese Durchschnittslinie in jeder der beyden Ebenen ein Loth zieht.

Modell 10.

Erklärung der parallenen Ebenen.

Zwey Ebenen werden parallel oder gleichlaufend genannt, wenn beyde, nach jeder Richtung ihrer Länge und Breite ins Unendliche verlängert, niemals zusammentreff.n. Dieser Begriff des Parallelismus kann auch auf mehr als zwey Ebenen angewendet werden. Man erkennt übrigens, daß diese Erklärung nur eine Worterklärung ist, indem erst wissenschaftlich nachgewiesen werden muß, daß es dergleichen parallele Ebenen gebe, und unter welchen Bedingungen sie Statt finden. Der Lehrer wird diesen Begriff hier nochmals durch mehrere Anschauungen erläutern.

Modell 11.

Erklärung der zusammenlaufenden und auseinanderlaufenden Ebenen.

Zwey Ebenen heißen zusammenlaufend oder convergirend, wenn dieselbe in ihrer Verlänge=

rung einmal einander erreichen. Ihr beyderseitiger Durchschnitt muß sodann eine gerade Linie seyn. Auseinanderlaufende oder divergirende Ebenen sind jene, welche in ihrer beyderseitigen Verlängerung sich immer mehr von einander entfernen. Hieraus sieht man, daß die zusammenlaufenden und auseinanderlaufenden Ebenen, in Bezug auf ihre gegenseitige Lage, mit den convergirenden und divergirenden Linien große Aehnlichkeit haben.

Denkt man sich zwey Ebenen, welche unter einem spitzen Winkel gegen einander geneigt sind, so kann man diese Begriffe von zusammenlaufenden und auseinanderlaufenden Ebenen dergestalt erläutern, daß der Anfänger die Entstehung solcher Ebenen erkennt. Die Bedingungen übrigens, unter welchen zwey Ebenen einander in ihrer Verlängerung nothwendig schneiden müssen, gehören nicht hieher, sondern in die Wissenschaftslehre.

Noch ist klar, daß zwey Ebenen, welche nach der einen Seite convergiren, nach der entgegengesetzten divergiren müssen, und umgekehrt.

Modell 12.

Erklärung der Nebenwinkel und Scheitelwinkel bey Durchschnitts-Ebenen.

Wenn eine Ebene mitten auf einer andern steht, so bildet sie mit dieser auf jeder Seite einen Neigungswinkel, welche zusammengenommen ihre Nebenwinkel heißen. Wenn der eine von ihnen ein spitzer ist, so muß der andere ein stumpfer seyn, und umge-

kehrt. Ist aber einer von ihnen ein rechter, so ist es auch der andere. Man erkennt hieraus die große Aehnlichkeit dieser Nebenwinkel mit den gewöhnlichen Nebenwinkeln der ebenen Geometrie. So wie diese, haben auch jene einen gemeinsamen Schenkel, und die beyden übrigen Ebenen, welche mit ihm die Nebenwinkel bilden, befinden sich in einer und der nämlichen Ebene.

Wenn sich zwey Ebenen dergestalt schneiden, daß von jeder zwey Stücke auf entgegengesetzten Seiten der andern liegen, so bilden sie an der gemeinschaftlichen Durchschnittslinie zwey Paare von Scheitelwinkeln. Auch diese stimmen im Wesentlichen mit den Scheitelwinkeln der Planimetrie überein, und die Anschauung lehrt, daß die Scheitelwinkel jedes Paares unter sich gleich sind. Ist einer von ihnen spitz, so ist es auch sein entgegengesetzter, und die beyden übrigen sind stumpfe Winkel. Ist aber einer von ihnen ein rechter Winkel, so ist es auch jeder der drey übrigen.

Man sieht übrigens, daß diese Erklärungen von Neben- und Scheitelwinkeln wirkliche Sacherklärungen sind, weil ihre Entstehung aus der Natur der Sache unmittelbar einleuchtet.

Modell 13.

Erklärung der Durchschnittswinkel gleichlaufender Ebenen durch eine dritte.

Wenn zwey parallele Ebenen durch eine dritte Ebene dergestalt geschnitten werden, daß sie mit bey-

den schiefe Winkel bildet, so lassen sich folgende Winkel, welche die Anschauung darstellt, erklären:

1) Die beyden innern entgegengesetzten Winkel heißen jene, welche an einerley Seite der Durchschnittsebene und zwischen den geschnittenen Ebenen liegen. Man wird zwey Paare derselben auffinden.

2) Aeusere und innere Winkel werden jene genannt, welche beyde auf einerley Seite der schneidenden Ebene liegen; der eine befindet sich aber zwischen den zwey Parallelebenen, der andere, ihm gleiche, ausserhalb derselben. Von solchen äussern und inneren Winkeln wird man vier Paare finden.

3) Die Wechselwinkel werden jene genannt, welche auf entgegengesetzten Seiten der schneidenden Ebene und so liegen, daß sich der eine zwischen den zwey Parallelebenen auf der einen Seite, der andere aber, ihm gleiche, zwischen eben diesen Ebenen auf der entgegengesetzten Seite befindet. Von diesen Winkeln gibt es zwey Paare.

Hieraus sieht man, daß auch hier eine große Aehnlichkeit zwischen diesen Winkeln und jenen der Planimetrie herrsche.

Modell 14.

Erklärung des Körperwinkels aus drey Seitenebenen.

Wenn man sich einen ebenen Winkel denkt, und aus dessen Scheitelpunkte eine gerade Linie zieht, welche sich über dessen Ebene erhebt, so ist klar, daß diese

Linie mit jedem Schenkel des gegebenen Winkels wiederum einen ebenen Winkel bildet. Den an dem gemeinsamen Scheitelpunkte dieser drey ebenen Winkel entstehenden und von eben diesen Winkeln daselbst eingeschlossenen Körperraum, nennt man einen Körperwinkel, und im gegenwärtigen Falle einen dreykantigen Körperwinkel. Diese Erklärung ist eine Sacherklärung, weil sie die Entstehung dieses Körperwinkels auf überzeugende Weise darstellt.

Unter den Seitenflächen dieses Körperwinkels versteht man jeden der drey ebenen Winkel, welche ihn umschliesen.

Seitenlinien oder Seitenkanten heißen jene drey gerade Linien, welche, obwohl aus einem gemeinschaftlichen Punkte ausgehend, doch nicht alle in einerley Ebenen liegen; denn jede von ihnen erhebt sich über die Ebene, welche die zwey andern bilden.

Des Körperwinkels Scheitelpunkt heißt jener Punkt, in welchem sich die drey Seitenkanten vereinigen.

Dieser Körperwinkel hat das Aehnliche mit dem ebenen Winkel, daß, so wie dieser keine Ebene allseitig begrenzt, auch jener den Körperraum nicht allseitig einschließt.

So wie der Flächenraum des ebenen Winkels durch Verlängerung seiner Schenkel zunimmt, und diese Schenkel selbst immer mehr aus einander treten, so erweitert sich auch der Körperraum des Körperwinkels durch Verlängerung seiner Seitenkanten und der dazwischenliegenden Ebenen. Desgleichen rücken diese Ebenen selbst immer mehr auseinander.

Der Körperwinkel heißt ein erhabener, wenn man ihn von aussen; ein hohler dagegen, wenn man ihn von innen betrachtet.

Modell 15.

Erklärung der mehrkantigen Körperwinkel.

Wenn man sich einen dreykantigen Körperwinkel vorstellt, und aus seinem Scheitelpunkte eine gerade Linie zieht, welche sich über irgend eine seiner drey Seitenflächen erhebt, so entstehen durch diese vier gerade Linien vier neben einander liegende ebene Winkel, welche den körperlichen Raum eines vierkantigen Körperwinkels einschliesen. Eine nothwendige Bedingniß zu seiner Entstehung ist übrigens, daß die vierte gerade Linie nicht in der Verlängerung einer oder der andern Seitenfläche des dreykantigen Körperwinkels liegt, woraus der vierkantige entstehen soll. Dieß ist abermals eine Sacherklärung, da die Entstehung des vierkantigen Körperwinkels Jedem, der ihren Sinn versteht, vollkommen einleuchtet.

Ferner ist hieraus klar, wie Körperwinkel entstehen können, welche fünf, sechs, sieben und mehrere Seitenkanten haben, und der Schüler wird im Stande seyn, z. B. die Entstehung eines fünfzigkantigen Körperwinkels nachzuweißen.

Modell 16.

Erklärung des senkrechten dreyeckigen Prisma.

Das senkrechte dreyeckige Prisma ist derjenige Körper, welcher von einem Dreyecke als

Grundfläche, von einem ihm congruenten und parallelen Dreyecke als Oberfläche, und von drey Rechtecken als Seitenflächen eingeschlossen ist, deren jedes auf Grund- und Oberfläche senkrecht steht.

Dieß ist eine Worterklärung, weil durch sie die mögliche Entstehung dieses Körpers noch nicht nachgewiesen ist.

Die Grundfläche eines senkrechten dreyeckigen Prisma heißt jenes Dreyeck, über welches der Körper hervortritt; Oberfläche aber, das der Grundfläche gegenüberliegende Dreyeck. Man sieht leicht, daß es willkührlich ist, welches von beyden Dreyecken als Grundfläche, und welches als Oberfläche betrachtet werden soll.

Unter der Seitenfläche dieses Körpers versteht man eines von den drey Rechtecken, welche zusammen genommen seine Gesammt-Seitenfläche bilden.

Die Seitenkanten dieses Prisma sind jene gerade Linien, welche je zwey homologe Scheitelpunkte der Grund- und Oberfläche verbinden.

Dieses dreyeckige Prisma wird ein senkrechtes genannt, weil jede Seitenkante sowohl auf der Grund- als Oberfläche lothrecht steht.

Noch bemerke man hier den Begriff des stereometrischen Körpers. Man versteht darunter einen allseitig begrenzten körperlichen Raum. Das dreyeckige Prisma ist daher ein Körper; dem Körperwinkel aber kann diese Benennung nicht zukommen, weil derselbe den körperlichen Raum nicht allseitig umschließet.

Modell 17.

Erklärung des schiefen dreyeckigen Prisma.

Das schiefe dreyeckige Prisma ist jener Körper, welcher von zwey parallelen, congruenten Dreyecken, und von drey Parallelogrammen als Seitenflächen dergestalt umschlossen ist, daß letztere mit der Grund- und Oberfläche schiefe Winkel bilden. Auch dieß ist eine blose Worterklärung.

Das schiefe dreyeckige Prisma erkennt man am Leichtesten daran, daß seine drey Seitenkanten auf der Grund- und Oberfläche schief stehen.

Verbindet man das Gemeinschaftliche, welches das senkrechte dreyeckige Prisma mit dem schiefen dreyeckigen Prisma darbietet, in ein Ganzes, so entsteht der Begriff vom dreyeckigen Prisma überhaupt, welches ein Körper ist, dessen Grund- und Oberflächen zwey congruente parallele Dreyecke, und dessen Seitenflächen drey Parallelogramme sind.

Modell 18.

Erklärung des senkrechten Parallelopipedums.

Das senkrechte Parallelopipedum ist jener Körper, welcher von acht Parallelogrammen als Grenzflächen, wovon je zwey gegenüberstehende parallel und congruent sind, dergestalt eingeschlossen ist, daß sämmtliche Seitenkanten auf den an ihren Enden liegenden Flächen lothrecht stehen. Hieraus sieht man

daß diese Erklärung nur eine Aufklärung des Wortes ist. Die wirkliche Entstehung desselben kann erst die Wissenschaftslehre nachweisen.

Wenn die Grundfläche des senkrechten Parallelopipedums ein Rechteck ist, so ist dieser Körper rings umher von acht Rechtecken eingeschlossen. Aber dessen Grundfläche kann auch ein schiefwinkeliges Parallelogramm seyn. Da Hauptkennzeichen des senkrechten Parallelopipedums ist daher dieses, daß jede seiner vier Seitenkanten auf der Grund- und Oberfläche lothrecht steht.

Modell 19.

Erklärung des schiefen Parallelopipedums.

Ein schiefes Parallelopipedum ist jener körperliche Raum, welcher von zwey congruenten, gleichlaufenden Parallelogrammen, als Grund- und Oberfläche, und von vier Seitenparallelogrammen, deren zwey gegenüberstehende parallel und congruent sind, dergestalt umschlossen wird, daß jede der vier Seitenkanten mit der Grund- und Oberfläche schiefe Winkel bildet. Auch dieß ist eine Worterklärung.

Man erkennt dieses Parallelopipedum sogleich daran, daß seine Seitenkanten auf der Grundfläche schief stehen. Aus der gehörigen Vergleichung des senkrechten mit dem schiefen Parallelopipedum entsteht der Begriff des Parallelopipedums überhaupt. Man versteht darunter einen Körper, welcher von sechs

Parallelogrammen, deren zwey gegenüberstehende jedesmal parallel und congruent sind, eingeschlossen wird.

Modell 20.

Das senkrechte viereckige Prisma.

Ein senkrechtes viereckiges Prisma ist ein Körper, dessen Grundfläche ein Trapez, dessen Oberfläche ein ihm paralleles und congruentes Trapez ist, dessen vier Seitenflächen aber Rechtecke sind, welche auf der Grund- und Oberfläche lothrecht stehen. Dieß ist ebenfalls eine Worterklärung.

Das senkrechte viereckige Prisma ist demnach von dem senkrechten Parallelopipedum nur darin verschieden, daß die Grundfläche des erstern ein Trapez, des letztern dagegen ein Parallelogramm ist.

Hieraus sieht man ferner, daß das senkrechte Parallelopipedum eine besondere Art der senkrechten viereckigen Prismen sey, und daß man sagen könne: das senkrechte Parallelopipedum ist ein senkrechtes viereckiges Prisma, dessen Grundfläche von einem Parallelogramme gebildet wird.

Modell 21.

Das schiefe viereckige Prisma.

Unter einem schiefen viereckigen Prisma versteht man einen Körper, welcher von einem Trapeze als Grundfläche, von einem parallelen congruenten Trapeze als Oberfläche, und von vier Parallelogrammen als Seitenflächen dergestalt eingeschlossen wird, daß

dessen vier Seitenkanten mit der Grund- und Oberfläche schiefe Winkel bilden.

Es ist klar, daß auch dieses eine blose Worterklärung sey.

Auch erkennt man, daß der Unterschied zwischen dem schiefen Parallelopipedum und dem schiefen viereckigen Prisma darin bestehe, daß letzteres ein Trapez, ersteres aber ein Parallelogramm zur Grundfläche hat.

Ferner erhellet, daß das schiefe Parallelopipedum als eine besondere Art des viereckigen Prisma erscheine, und daß man sagen kann: das schiefe Parallelopipedum ist ein schiefes viereckiges Prisma, welches ein Parallelogramm zur Grundfläche hat.

Desgleichen läßt sich nun der allgemeine Begriff eines viereckigen Prisma erklären. Es ist nämlich ein Körper, dessen Grund- und Oberflächen parallel laufende congruente Vierecke, und dessen Seitenflächen vier Parallelogramme sind. Unter diesem allgemeinen Begriffe stehen sowohl alle senkrechte, als schiefe Parallelopipeden.

Modell 22.

Erklärung des senkrechten Cylinders.

Der senkrechte Cylinder ist ein körperlicher Raum, welcher von zwey congruenten, parallel laufenden Kreisflächen und einer einfachgekrümmten, in sich selbst zurücklaufenden Seitenfläche dergestalt eingeschlossen ist, daß dessen Achse auf der Grund- und Oberfläche senkrecht steht. Daß dieß eine bloße Erklärung des Wortes sey, ist einleuchtend.

Es ist willkührlich, welche Kreisfläche man zur Grundfläche, und welche man zur Oberfläche annehmen will.

Unter der Seitenfläche des Cylinders versteht man die einfachgekrümmte Fläche, welche die Grund- und Oberfläche verbindet.

Die Achse des Cylinders heißt jene gerade Linie, welche vom Mittelpunkt der Grundfläche zum Mittelpunkte der Oberfläche reicht, und bey dem senkrechten Cylinder auf diesen Kreisflächen senkrecht steht.

Denkt man sich eine Ebene, welche den senkrechten Cylinder, längs seiner Achse, in zwey Hälften theilt, so wird auch seine Seitenfläche an zwey entgegenstehenden Orten durchschnitten. Jeder dieser Durchschnitte bildet eine gerade Linie, welche die Seite des Cylinders genennt wird.

Diese zwey Seiten bilden mit den zugehörigen Durchmessern der Grund- und Oberfläche ein Rechteck, welches durch die Achse halbirt wird, und man kann die Entstehung des senkrechten Cylinders dadurch versinnlichen, daß sich dieses halbe Rechteck um die unbewegliche Achse einmal ganz und gar herumdreht, wodurch von der Seite des Cylinders seine krumme Umfangsfläche erzeugt wird.

Modell 23.

Erklärung des schiefen Cylinders.

Der schiefe Cylinder ist ein Körper welcher von zwey congruenten, parallelen Kreisflächen und

von einer einseitig gekrümmten Seitenfläche dergestalt eingeschlossen ist, daß seine Achse mit der Grund- und Oberfläche schiefe Winkel bildet.

Es ist klar, daß jede der beyden Kreisflächen als Grundfläche, oder als Oberfläche angesehen werden kann. Nennt man die eine derselben Grundfläche, so ist die andere die Oberfläche, und umgekehrt.

Die Achse des schiefen Cylinders ist eine gerade Linie, welche die Mittelpunkte der Grund- und Oberfläche verbindet. Wenn diese Achse auf jenen Flächen schief steht, so ist der Cylinder ein schiefer.

Wenn man eine Durchschnittsebene längs der Achse des Cylinders und in der Ebene ihres Neigungswinkels sich denkt, so wird der ganze Körper in zwey Hälften getheilt, und die Durchschnittsfläche bildet ein schiefwinkeliges Parallelogramm, wovon die mit der Achse parallelen Seitenlinien der Achse gleich sind. Jede dieser Seitenlinien heißt die Seite des schiefen Cylinders.

Geschieht der Durchschnitt dieses Körpers längs der Achse, aber nach einer Richtung, welche auf der vorigen lothrecht steht, so bildet die Durchschnittsfläche ein Rechteck, dessen Parallelseiten ebenfalls wieder gleich sind.

Aus dieser Betrachtung ergibt sich, daß der schiefe Cylinder nicht, so wie der senkrechte, durch Umdrehung eines Parallelogramms um eine seiner Seitenlinien entstehen kann.

Modell 24.

Erklärung der senkrechten dreyeckigen Pyramide.

Die senkrechte dreyeckige Pyramide ist jener Körper, dessen Grundfläche ein gleichseitiges Dreyeck ist, und dessen Seitenflächen drey unter sich congruente in einer gemeinsamen Spitze zusammenlaufende Dreyecke sind.

Unter Grundfläche dieses Körpers versteht man das gleichseitige Dreyeck, worüber sich derselbe erhebt; Seitenflächen aber werden die drey übrigen Dreyecke genannt.

Die Spitze der Pyramide ist der Scheitelpunkt jenes Körperwinkels, welcher der Grundfläche gegenüber liegt.

Unter den Seitenkanten dieser Pyramide versteht man jene drey gerade Linien, welche aus dem Durchschnitte von je zwey der drey Seitenflächen entstehen.

Die Achse dieser Pyramide ist eine gerade Linie von ihrer Spitze nach dem Mittelpunkte der Grundfläche. Weil diese Achse hier auf der Grundfläche senkrecht steht, so wird die Pyramide selbst eine senkrechte genannt.

Könnte man aus der Mitte eines gleichseitigen Dreyecks eine senkrechte Linie auf seine Ebene errichten, so dürfte man nur in ihr einen willkührlichen Punkt annehmen, und von ihm nach jedem Scheitel der Grundfläche eine gerade Linie ziehen, um die senk-

rechte dreyeckige Pyramide zu konstruiren. Da aber das Errichten eines Lothes auf eine Ebene in die stereometrische Wissenschaftslehre gehört, so ist obige Erklärung der senkrechten dreyeckigen Pyramide eine blose Worterklärung.

Nimmt man eine der Seitenflächen dieser Pyramide zur Grundfläche an, so ist sie, in Bezug auf diese neue Grundfläche, keine senkrechte Pyramide mehr.

Modell 25.

Erklärung der schiefen dreyeckigen Pyramide.

Die schiefe dreyeckige Pyramide ist jener Körperraum, welcher von vier Dreyecken als Seitenflächen dergestalt eingeschlossen wird, daß die Seitenkanten mit der Grundfläche ungleiche Winkel bilden.

Man sieht sogleich, daß jede dieser vier Seitenflächen als Grundfläche kann betrachtet werden, wo denn der Scheitel des ihr entgegen liegenden Körperwinkels ihre Spitze heißt.

Denkt man sich ein ungleichseitiges Dreyeck, und ausserhalb seiner Ebene (oberhalb oder unterhalb derselben) einen willkührlichen Punkt, welchen man mit den drey Scheitelpunkten des Dreyeckes durch gerade Linien verbindet, so entsteht eine schiefe dreyeckige Pyramide. Hieraus erhellet, daß die Erklärung dieses Körpers hier schon als eine Sacherklärung anzusehen ist.

Modell 26.

Erklärung der senkrechten viereckigen Pyramide.

Die senkrechte viereckige Pyramide ist jener Körper, dessen Grundfläche ein Rechteck ist, dessen Seitenflächen vier gleichschenkelige Dreyecke sind, welche dergestalt sich in einer Spitze vereinigen, daß eine gerade Linie, von dieser Spitze nach der Mitte der Grundfläche gezogen auf dieser senkrecht steht.

Diese senkrecht stehende Linie wird die Achse der Pyramide genannt.

Es ist klar, daß die Grundfläche dieses Körpers auch eine Quadrat seyn kann, in welchem Falle die vier Seitenflächen unter sich congruent sind. Auch bilden nun die vier Seitenkanten einerley Winkel mit der Grundfläche.

Könnte man aus der Mitte eines Rechtecks oder eines Quadrats ein Loth auf dessen Ebene errichten, so dürfte man in demselben nur einen Punkt annehmen, und denselben mit den vier Scheiteln der Grundfläche durch vier gerade Linien verbinden, um den Körperraum der senkrechten viereckigen Pyramide zu erhalten. Da aber dieses Loth hier noch nicht construirt werden kann, so ist auch obige Erklärung noch keine Sacherklärung.

Befriedigender kann man die senkrechte viereckige Pyramide hier schon auf folgende Weise entstehen lassen. Man construire über jede Seite eines gegebenen Quadrates, innerhalb der Ebene, worin es sich

befindet; jedoch, in Bezug auf seine Fläche, nach aussen ein beliebiges gleichschenkeliges Dreyeck, welches jedem der drey andern congruent ist. Läßt man nun diese vier Dreyecke sich um ihre Grundlinien (als unbewegliche Axenlinien) aufwärts bewegen, so werden sie alle vier sowohl in ihren Seitenlinien, als in ihrer Spitze zusammentreffen und die verlangte Pyramide bilden.

Modell 27.

Erklärung der schiefen viereckigen Pyramide.

Die schiefe viereckige Pyramide ist jener körperliche Raum, welcher von einem Vierecke zur Grundfläche, und von vier Dreyecken als Seitenflächen dergestalt umschlossen wird, daß die vier Seitenkanten ungleiche Winkel mit der Grundfläche bilden.

Die Entstehung dieses Körpers läßt sich hier schon überzeugend nachweisen, wodurch obige Erklärung zur Sacherklärung wird. Wenn man nämlich ausserhalb der Ebene eines Vierecks irgendwo im Raume einen Punkt annimmt, aus welchem nach den vier Scheitelpunkten der Grundfläche vier gerade Linien gezogen werden, so kömmt diese Pyramide zum Vorschein.

Modell 28.

Erklärung des senkrechten Kegels.

Der senkrechte Kegel ist ein Körper, welcher von einem Kreise als Grundfläche, und von einer

einfach gekrümmten, in einer Spitze zusammenlaufenden Seitenfläche dergestalt eingeschlossen ist, daß eine gerade Linie von dieser Spitze nach der Mitte der Grundfläche gezogen auf letzterer senkrecht steht.

Diese gerade Linie heißt die Achse des Kegels. Daher kann man auch sagen, der senkrechte Kegel sey jener, dessen Achse auf der Grundfläche lothrecht ist.

Wenn man den senkrechten Kegel mit einer Ebene längs seiner Achse durchschneidet, so entsteht als Durchschnittsfläche ein gleichschenkeliges Dreyeck, welches durch die Achse in zwey congruente rechtwinkelige Dreyecke zertheilt wird. Dieses Dreyeck nennt man das Achsendreyeck. Wenn man sich vorstellt, daß sich dasselbe um die unbewegliche Achse einmal ganz und gar herumbeweget, so beschreibt die schiefe Seite die krumme Umfangsfläche des Kegels, die Grundlinie aber dessen Grundfläche. Auf diese Weise läßt sich die Entstehung eines senkrechten Kegels durch Umdrehung eines rechtwinkeligen Dreyecks um eine seiner unbeweglichen Catheten begreifen.

Die Seite des senkrechten Kegels heißt jene gerade Linie, welche man von dessen Spitze längs der Seitenfläche zur Peripherie der Grundfläche ziehen kann.

Modell 29.

Erklärung des schiefen Kegels.

Unter dem schiefen Kegel versteht man jenen Körper, dessen Grundfläche ein Kreis, dessen Seitenfläche eine einfach gekrümmte, in einen Punkt sich

endigende krumme Fläche ist; so, daß dessen Achse schief auf der Grundfläche steht.

Unter der Achse versteht man auch hier eine gerade Linie, welche die Spitze mit dem Mittelpunkte der Grundfläche verbindet.

Die Entstehung des schiefen Kegels läßt sich hier schon überzeugend nachweisen. Man denke sich einen Kreis, oberhalb seiner Ebene einen festen Punkt, und von diesem eine gerade Linie zur Peripherie des Kreises gezogen und über dieselbe willkührlich verlängert. Bewegt sich nun diese Seitenlinie, in steter Berührung mit der Peripherie dieses Kreises, rings um dieselbe, so beschreibt sie die krumme Seitenfläche des schiefen Kegels.

Wenn man den schiefen Kegel längs seiner Achse mit einer Ebene durchschneidet, welche in dem Neigungswinkel dieser Achse gegen die Grundfläche liegt, so bildet der Durchschnitt ein ungleichseitiges Dreyeck, dessen eine Seite größer, dessen andere kleiner als die Achse ist.

Jede dieser beyden Linien heißt die Seite des schiefen Kegels, und es ist klar, daß dieser Kegel ein ungleichseitiger sey. Nur bey einem Durchschnitte (dessen Richtung man leicht finden wird) ist das Achsendreyeck ein gleichschenkeliges.

Modell 30.

Erklärung der Kugel.

Die Kugel ist jener Körper, welcher durch eine allseitig gekrümmte Oberfläche umschlossen ist; so, daß

jeder Punkt derselben von einem im Kugelraume befindlichen Punkte, gleichen Abstand hat.

Die den Kugelraum einschliesende allseitig gekrümmte Fläche heißt die Kugelfläche.

Die Entstehung der Kugel läßt sich hier schon nachweisen. Man denke sich einen Halbkreis, welcher um seinen unbeweglichen Durchmesser, als Achse, sich einmal durchaus herumbewegt, so beschreibt die halbe Peripherie dieses Kreises die Kugelfläche, von welcher der Kugelraum eingeschlossen wird.

Der Durchmesser dieses Halbkreises ist auch Durchmesser der Kugel, sein Halbmesser ihr Halbmesser, sein Mittelpunkt ihr Mittelpunkt.

Durchmesser der Kugel ist daher jede gerade Linie, welche sich durch den Mittelpunkt nach zwey entgegenstehenden Punkten der Kugelfläche erstreckt, Halbmesser aber jede gerade Linie aus dem Mittelpunkte nach der Kugelfläche.

Pole der Kugel heißen die zwey Endpunkte eines ihrer Durchmesser.

Wenn man die Kugel mit einer Ebene durchschneidet, welche durch ihren Mittelpunkt geht, so entsteht ein Kreis, welchen man den größten Kreis der Kugel nennt. Er ist auch derjenige, durch dessen Umdrehung um seinen unbeweglichen Durchmesser der Kugelraum entsteht.

Wird die Kugel mit einer Ebene geschnitten, welche nicht durch den Mittelpunkt geht, so entsteht auch ein Kreis, welcher kleiner als der vorige ist,

und immer kleiner wird, je weiter der Schnitt von dem Mittelpunkte geschieht. Von diesen Kreisen handelt die Wissenschaftslehre.

Modell 31.

Erklärung des Tetraëders.

Das Tetraëder ist ein Körper, welcher von vier gleichseitigen, unter sich congruenten Dreyecken eingeschlossen wird.

Seine Entstehung kann leicht nachgewiesen werden. Man construire über jeder Seite eines gleichseitigen Dreyecks, in seiner Ebene, ein ihm congruentes Dreyeck; so, daß diese drey Dreyecke ausserhalb der Fläche des ersten fallen. Dreht sich nun jedes dieser drey Dreyecke um jene Seite, welche es mit dem ersten gemein hat, so lange, bis sämmtliche drey Dreyecke mit ihren Seitenlinien und Spitzen zusammentreffen, so bilden sie das Tetraëder.

Die Anschauung lehrt, daß das Tetraëder eine Gattung der senkrechten dreyeckigen Pyramiden ist, weil die gerade Linie, welche von der Spitze nach der Mitte der Grundfläche gezogen werden kann, auf der letztern senkrecht steht.

Man nennt das Tetraëder einen regelmäßigen Körper, weil derselbe von lauter congruenten Seitenflächen umschlossen ist, welche alle gleiche Körperwinckel und gleiche Seitenkanten, auch gleiche Kantenwinkel bilden.

Modell 32.

Erklärung des Würfels.

Der Würfel ist jener Körper, welcher von acht quadratischen, unter sich congruenten Flächen begrenzt ist.

Grundfläche des Würfels heißt jedes Quadrat seiner Grenzfläche, über welches sich derselbe erhebt; Oberfläche nennt man sodann die entgegengesetzte Fläche, und Seitenflächen die vier übrigen.

Seite des Würfels nennt man eine seiner zwölf gleichen Kanten.

Die Entstehung des Würfels muß durch die Wissenschaftslehre nachgewiesen werden.

Da der Würfel von lauter congruenten Seitenflächen, wovon je drey gleiche Körperwinkel bilden, eingeschlossen ist, so nennt man ihn auch einen regelmäßigen Körper.

Modell 33.

Erklärung des Octaëders.

Das Octaëder ist jener Körper, welcher von acht gleichseitigen, unter sich congruenten Dreyecken gebildet wird.

Da das Octaëder aus zwey gleichen vierseitigen senkrechten Pyramiden zusammengesetzt ist, deren Grundflächen Quadrate sind, so hängt die Entstehung dieses Körpers von der Construction einer senkrechten viereckigen Pyramide von quadratischer Grundfläche

ab, und kann somit in der Anschauungslehre noch nicht befriedigend erkannt werden.

Da das Octaëder von lauter congruenten Seitenflächen und von sechs gleichen Körperwinkeln umschlossen ist, so muß man es ebenfalls einen regelmäßigen Körper nennen.

Modell 34.

Erklärung des Icosaëders.

Das Icosaëder ist jener Körper, welcher von zwanzig gleichseitigen, unter sich congruenten Seitenflächen begrenzt wird; so, daß auch sämmtliche Körperwinkel unter sich gleich sind.

Diese Erklärung ist eine blose Worterklärung, weil die wirkliche Entstehung des Icosaëders erst in der Folge nachgewiesen werden kann.

Irgend eine der Seitenkanten dieses Körpers wird die Seite des Icosaëders genannt, welches ebenfalls als regelmäßiger Körper erscheint.

Modell 35.

Erklärung des Dodecaëders.

Unter Dodecaëder versteht man einen Körper, welcher aus zwölf congruenten regelmäßigen Fünfecken als Grenzflächen besteht. Diese Erklärung ist eine Worterklärung.

Jede Seitenfläche des Dodecaëders kann zur Grundfläche, und jede zur Oberfläche werden.

Da dieser Körper lauter congruente Seitenflächen und durchaus gleiche Körperwinkel hat, so wird er ebenfalls ein regelmäßiger Körper genannt.

Schlußwort.

Wenn der Schüler, unter Anleitung des Lehrers oder durch Selbststudium, diesen zweyten Cursus theilnehmend durchwandert hat, so sind ihm nicht blos die stereometrischen Grundanschauungen, sondern auch die ihnen entsprechenden Grundbegriffe klar geworden. Da sich indessen diese Begriffe meist unmittelbar auf individuelle Objekte beziehen, so wird es dem nachfolgenden dritten Cursus vorbehalten bleiben, sich immer mehr zum Allgemeinern zu erheben, um hierdurch dem Streben des Geistes und dem Bedürfnisse der Wissenschaft zu entsprechen.

Aber der Schüler muß auch seine Anschauungskraft daran üben, daß er im Stande ist, an einer Verbindung von Linien, welche sich in einerley Ebene befinden, jene Ebenen und Körper zu erblicken, welche sie darstellen. Dies ist um so nöthiger, als es die Bequemlichkeit der Darstellung fodert; aber auch um so leichter, als der Anfänger durch die seitherigen Lehren hierzu kräftig vorbereitet wurde.

Endlich müssen auch die verschiedenen Objekte der Stereometrie, zur Abkürzung des Vortrags, mit Buchstaben gehörig bezeichnet werden.

Diese sämmtliche Betrachtungen bilden den Inhalt des nunmehr folgenden dritten Cursus.

Der

stereometrischen Anschauungslehre dritter Cursus.

Stereometrische Bezeichnungen.

Dritter Cursus.

Stereometrische Bezeichnungen.

Vorwort.

Da der Gegenstand dieses dritten Cursus ein dreyfacher ist; nämlich: Darstellung der stereometrischen Objekte in der Ebene, ihre Bezeichnung durch Buchstaben, und die Erweitung der bisher bestimmten Begriffe: so muß auch der verständige Lehrer die Theilnahme des Schülers nach diesem dreyfachen Gesichtspunkte anregen, und besonders den stereometrischen Blick durch Vor- und Nachzeichnen schärfen, und allmählig so ausbilden, daß sich der Schüler auch in verwickeltern Fällen mit Klarheit zurecht finden kann. Sehr zweckmäßig ist es daher, wenn sich der Anfänger selbst in der Verzeichnung solcher körperlichen Räume in der Ebene mehrfache Uebung verschafft, und sich besonders angelegen seyn läßt, diese Zeichnungen so zu entwerfen, daß ihr körperlicher Ausdruck leicht und gefällig ins Auge fällt. Die Bestimmung der allgemeinern Begriffe und die Bezeichnungsweise mit Buchstaben wird ihm weniger Schwierigkeit verursachen. Dieser

dritte Cursus befolgt übrigens im Allgemeinen die Ordnung des vorhergehenden.

Figur 1.

Man stelle sich unter m n g f irgend eine Ebene vor, welche entweder durch gerade oder durch krumme, oder durch gerade und krumme Linien umschlossen ist, wähle darin einen beliebigen Punkt b, und denke sich unter der aus ihm oberhalb der Ebene gezogenen geraden Linie b a eine solche Linie, welche auf dieser Ebene lothrecht steht. Man wird sich den senkrechten Stand der Linie a b auf der Ebene m g klar vorstellen, wenn aus dem Punkte b die geraden Linien b c und b d in dieser Ebene gezogen werden, wo man sich denn sowohl unter dem Winkel a b d, als auch unter dem Winkel a b c einen rechten vorstellen muß, obschon jeder von ihnen einem stumpfen Winkel gleichet. Es ist rathsam, daß der Anfänger diese einfache Zeichnung so lange betrachtet, bis er die Linie a b als eine solche erblickt, welche sich über die Fläche f n erhebt und auf ihr senkrecht steht.

Figur 2.

Wenn f g n m wiederum eine Ebene bedeutet, so kann man sich unter der Linie a b eine solche denken, welche auf ihr schief steht. Diese schiefe Lage gegen die Ebene wird um so klarer hervortreten, wenn man sich unter a c eine auf dieser Ebene senkrecht stehende Linie vorstellt, welche im Punkte c sie berühret, und nun von b nach c die gerade Verbindungslinie b c zieht.

Hier erscheint nämlich der Winkel a c b als ein rechter, a b c aber als ein spitzer Winkel, welcher den Neigungswinkel der schiefen Linie a b gegen die Ebene f n bestimmt. Verlängert man die Linie c b nach d, so stellt a b d den stumpfen Neigungswinkel dieser Linie gegen die Ebene dar.

Figur 3.

Wenn man die Ebenen f g h m und p q v w, welche sich in der geraden Linie v w durchschneiden, ihrer Lage nach mit einander vergleicht, so ergibt sich, daß p q v w auf f g h m senkrecht stehe. Um den Neigungswinkel beyder Ebenen anschaulich zu machen, nehme man in der Durchschnittslinie v w den willkührlichen Punkt c, ziehe aus ihm auf v w in der Ebene f h das Loth c d, und auf eben diese v w in der Ebene p v das Loth c a, so ist Winkel a c d der Neigungswinkel beyder Ebenen, und es wird, weil dieser ein rechter ist, die Ebene p v auf f h lothrecht stehen. Wenn die Linie d c nach r verlängert wird, so ist auch der Neigungswinkel a c r, als Nebenwinkel von a c d, ein rechter.

Figur 4.

Wenn die Ebene m q von der Ebene p v in der geraden Linie q v durchschnitten wird, und man wählt in letzterer einen willkührlichen Punkt b, aus welchem auf q v das Loth b c in m q und das Loth b a in p v gezogen wird, so ist der Winkel a b c Neigungswinkel beyder Ebenen. Da dieser nun als ein

spitzer, sein Nebenwinkel aber als ein stumpfer erscheint, so steht die Ebene p v schief auf der Ebene m q, und die Winkel a b c und a b r stellen diese schiefe Neigung dar.

Figur 5.

Die Ebenen a b und p q stellen, in Bezug auf ihre gegenseitige Lage, zwey parallele Ebenen vor. Dieser Parallelismus wird um so anschaulicher, wenn man sich die gerade Linie m n, welche auf beyden Ebenen lothrecht steht, vorstellt, und durch den Punkt m die Linie g h durch n, die Linie v w, welche ebenfalls parallel sind, vorstellt.

Figur 6.

Wenn sich die Ebenen a b und c d in der Linie b c durchschneiden, so stellen sie sowohl zusammenlaufende als auseinanderlaufende Ebenen dem Auge dar. Denkt man sich, die Ebene a b könne um die unbewegliche Durchschnittslinie b c auf und ab gedreht werden, so versinnlicht dieses den Begriff von mehr oder weniger convergirenden und mehr oder weniger divergirenden Ebenen.

Figur 7.

Man nehme an, daß die zwey Ebenen a b und c d sich in der Linie m n durchschneiden; so, daß von der Ebene a b das Stück a m n q zur einen Seite und p m n b zur andern Seite der Ebene c d ligt, wo denn auch das Stück c m n v zur einen Seite,

w m n d aber zur andern Seite von a b liegen wird: so stellen diese Durchschnittsebenen sowohl Nebenwinkel als Scheitelwinkel dar. Die Nebenwinkel sind t o f und t o h, oder h o t und h o r, oder r o h und r o f, oder f o r und f o t. Die Scheitelwinkel aber sind t o f und h o r, dann f o r und t o h.

Figur 8.

Wenn die parallelen Ebenen a b und c d von der dritten Ebene x y, in den Durchschnittslinien f i und l t geschnitten werden, so lassen sich die verschiedenen, bereits im vorhergehenden Cursus genannten, Winkel anschaulich nachweissen, wenn man die Linien m g, o n und w v so zieht, daß m h n und m r v die Neigungswinkel der Ebene x y gegen a b und c d darstellen. Hier sind nämlich die Winkel n h r und v r h die beyden innern Winkel zur Rechten; die Winkel o h r und w r h die beyden innern Winkel zur Linken. Die vier Paare des äussern und des ihm zugehörigen innern Winkels sind folgende: Winkel m h n und m r v, dann W. m h o und m r w, hierauf W. g r v und g h n, endlich W. g r w und g h o. Die zwey Paar von Wechselwinkeln aber sind Winkel n h r und w r h, sodann W. o h r und v r h.

Figur 9.

Wenn a b c irgend ein Dreyeck und d einen oberhalb seiner Ebene gewählten Punkt vorstellt, aus welchem man nach a, b, und c die drey geraden Li-

nien d a, d b, und d c zieht, so entsteht an dem Punkte d ein dreykantiger Körperwinkel. Man erkennt sogleich, daß die Linie d b ausserhalb der Ebene a d c, die Linie d a ausserhalb der Ebene d b c und die Linie d c ausserhalb der Ebene d a b sich befindet. Die drey Seitenwinkel dieses Körperwinkels sind a d b, b d c und c d a.

Figur 10.

Es sey a b c d irgend ein Viereck, g ein ausserhalb seiner Ebene gewählter Punkt, welchen man durch die geraden Linien g a, g b, g c und g d mit den Scheitelpunkten a, b, c und d verbindet, so erblickt man bey g einen vierkantigen Körperwinkel. Die vier Seitenwinkel, welche ihn bilden, sind a g b, b g c, c g d und d g a.

Figur 11.

Auf gleiche Weise stellt der bey h sich befindliche Körperwinkel einen fünfkantigen dar; seine fünf Seitenkanten sind h a, h b, h c, h d, und h g; seine fünf Seitenflächen aber sind: Winkel a h b, W. b h c, W. c h d W. d h g und W. g h a.

Aus dieser sinnlichen Darstellung der Körperwinkel ist einleuchtend, wie man im Stande ist, sechs, sieben, acht, und mehrkantige Körperwinkel durch Linien, welche in einerley Ebene liegen, darzustellen.

Figur 12.

Die in dieser Zeichnung verbundenen geraden Linien stellen dem Auge das senkrechte dreyeckige Prisma dar. Das Dreyeck d g f ist seine Grundfläche, das ihm congruente und parallele Dreyeck a c b seine Oberfläche; die geraden Linien d a, g c und f b sind seine Kanten, welche auf Grund- und Oberfläche senkrecht stehen und unter sich gleich sind; die Rechtecke a c g d, b c g f und a b f d sind seine drey Seitenflächen; bey a, b, c, d, f und g liegen sechs Körperwinkel, deren jeder von drey ebenen Winkeln eingeschlossen ist. Den Körperwinkel a bilden die W. b a c, b a d und c a d; den Körperwinkel b bilden die W. a b c, a b f und c b f; den Körperwinkel c aber die Winkel a c b, a c g und b c g. Den Körperwinkel bey d umschließen die W. f d g, f d a und g d a; jenen bey f die W. d f g, d f b und g f b; jenen bey g endlich die W. d g f, d g c und f g c.

Figur 13.

Diese Figur stellt durch die Grenzen a b c g d f ein schiefes dreyeckiges Prisma vor, dessen Verschiedenheit von dem senkrechten daraus anschaulich wird, daß seine drey Seitenkanten a d, c g und b f schief auf der Grundfläche d g f und auf der Oberfläche a c b stehen. Die Seitenflächen und Körperwinkel dieses Prisma lassen sich hier, wie bey der vorigen Figur, leicht mit Buchstaben angeben, was eine sehr lehrreiche Uebung für Anfänger ist, so wie man denselben auch die Zeichnung solcher Körper unter

verschiedenen Größen und Gestalten nicht genugsam empfehlen kann.

Figur 14.

Diese Figur stellt dem Auge ein senkrechtes Parallelopipedum vor, welches man mit a b d c p q m n bezeichnet, oder kürzer durch a q, oder b p, oder d n, oder c m nach den beyden gegenüberliegenden Körperwinkeln. Das Parallelogramm n m q p ist seine Grundfläche, a b d c aber seine Oberfläche; die gleichen geraden Linien a n, b m, d q, und c p, welche auf der Grund- und Oberfläche senkrecht stehen, sind seine Seitenkanten. Seine acht Körperwinkel liegen bey a, b, c, d, n, m, p, q; jeder von ihnen wird von drey rechten Winkeln begrenzt, welche in der genannten Ordnung nachfolgende sind: c a b, c a n und b a n; a b d, a b m und d b m; a c d, a c p und d c p; c d b, c d q und b d q; p n m, p n a und m n a; n m q, n m b und q m b; n p q, n p c und q p c; p q m, p q d und m q d. Auch stellen sich die vier Seitenflächen dieses Körpers anschaulich dar; sie sind: c d q p als Vorderfläche, a b m n als Hinterfläche, d b m q als Seitenfläche zur Rechten und c a n p als Seitenfläche zur Linken.

Figur 15.

In dieser Zeichnung erblickt man ein schiefes Parallelopipedum, an welchem, wie an dem senkrechten, alles Vorhergehende nachgewiesen werden

kann. Der Unterschied von beyden besteht nur darin, daß die Seitenkanten a n, b m, c p, und d q mit der Grund- und Oberfläche schiefe Winkel bilden.

Figur 16. und 17.

Die Figur 16. stellt durch m n b a f h g d ein senkrechtes viereckiges Prisma dar. Das Trapez d g h f bildet die Grundfläche, das ihm congruente und parallele Trapez m n b a seine Oberfläche. Die vier Seitenkanten sind m d, a f, b h, und n g, welche auf der Grund- und Oberfläche lothrecht stehen. Die vordere Fläche ist das Rechteck m n g d, die hintere Fläche das Rechteck a b h f, die Seitenfläche zur Rechten das Rechteck b n g h und jene zur Linken das Rechteck a m d f. Seine acht Körperwinkel liegen bey m, a, b, n, d, f, h und g. Jeder von ihnen wird von drey ebenen Winkeln begrenzt, deren Aufsuchung und Benennung eine lehrreiche Uebung für die Anfänger ist. Auf gleiche Art zeigt Figur 17. das schiefe viereckige Prisma.

Diese Stelle scheint zweckmäßig, um dem Anfänger den Begriff von dem prismatischen Körper überhaupt zu entwickeln, nachdem sich derselbe in dem Vorhergehenden mehrere Arten desselben zur Klarheit gebracht hat.

Ein Prisma überhaupt ist nämlich derjenige Körper, welcher von irgend einer ebenen geradlinigen Figur als Grundfläche, von einer dieser congruenten und parallelen Figur als Oberfläche,

und von so vielen Parallelogrammen als Seitenflächen eingeschlossen ist, als wie viele Seiten die Grundfläche hat.

Hieraus folgt:

1) Daß es fünfeckige, sechseckige, siebeneckige, und überhaupt vieleckige Prismen gebe, und es ist dem Anfänger zu rathen, sich in der Aufzeichnung derselben zu üben;

2) Daß jedes Prisma so viele Seitenkanten und Seitenflächen habe, als dessen Grundfläche Seiten hat;

3) Daß jedes Prisma noch einmal so viel Körperwinkel habe, als dessen Grundfläche Seiten hat;

4) Daß jene Prismen senkrechte sind, deren Seitenkanten mit ihrer Grund- und Oberfläche rechte Winkel bilden; jene aber, bey welchen diese Winkel schiefe sind, werden schiefe Prismen genannt.

5) Daß die Parallelopipeden viereckige Prismen sind, deren Grund- und Oberfläche ein Parallelogramm ist;

6) Daß der Würfel als ein Parallelopipedum erklärt werden kann, dessen sechs Seitenflächen congruente Quadrate sind.

Figur 18.

Diese Zeichnung stellt einen senkrechten Cylinder vor; dngmd ist seine Grundfläche, ahcqa seine Oberfläche, f der Mittelpunkt in jener, b der Mittelpunkt in dieser, b f seine Achse, welche auf

beyden Kreisflächen senkrecht steht. Auch stellt a c g d das Rechteck vor, welches entsteht, wenn der Cylinder von einer Ebene längs der Achse b f und nach der Richtung a c und d g durchschnitten wird, wobey a c der Durchmesser der Oberfläche, d g aber der Durchmesser der Grundfläche ist.

Die Achse b f theilt das Rechteck a c g d in zwey congruente Theile, und wenn man sich vorstellt, das Rechteck a b f d drehe sich um die unbewegliche Linie b f einmal ganz und gar herum, so beschreibt f d den Kreis der Grundfläche, b a jenen der Oberfläche, und die Seite des Cylinders, d. h. a d die krumme Seitenfläche dieses Körpers, woraus man sich die Entstehung des senkrechten Cylinders durch die Umdrehung eines Rechtecks versinnlichen kann.

Auch ist klar, daß die Seiten a d und c g auf den beyden Kreisflächen senkrecht sind, so wie auch aus dieser Entstehung des senkrechten Cylinders einleuchtend wird, daß seine krumme Seitenfläche nur einfach gekrümmt, (d. h. nach der Breite und nicht nach der Höhe) sey.

Denkt man sich den senkrechten Cylinder dergestalt auf einer Ebene liegend, daß er mit der Seite a d dieselbe berührt, und dreht denselben, durch eine rollende Bewegung, auf dieser Ebene so lange herum, bis die Seite a d wiederum mit der Ebene in Berührung kömmt, so wird seine krumme Seitenfläche in ein Rechteck verwandelt, dessen eine Seite die Linie a d, die andere aber der Umfang seiner kreisförmigen Grundfläche ist.

Figur 19.

Der hier dargestellte schiefe Cylinder wird mit den Buchstaben a c g d benennt; f ist der Mittelpunkt seiner Grundfläche, b jener seiner Oberfläche; f d, f g, b a, b c sind die Halbmesser; d g, a c die Durchmesser dieser Flächen. Die Linie b f stellt seine Achse dar, und weil diese mit der Grund- und Oberfläche schiefe Winkel bildet, so nennt man diesen Cylinder selbst den schiefen.

Wenn man diesen Cylinder mit einer Ebene nach b f und durch den Punkt a schneidet, so entsteht das schiefwinkelige Parallelogramm a c g d, worin die Linien a d und c g die Seiten des schiefen Cylinders vorstellen. Auch hier wird das Parallelogramm a c g d durch die Linie b f in zwey congruente Stücke getheilt, wie bey dem senkrechten Cylinder. Allein der schiefe Cylinder kann nicht durch die Drehung des Parallelogramms a b f d um die unbewegliche b f hervorgebracht werden; welches dadurch anschaulich gemacht wird, daß man ein aus Pappe verfertigtes schiefes Parallelogramm um eine seiner feststehenden Seitenlinien wirklich herumbeweget.

Der Anfänger kann sich die Entstehung des schiefen Cylinders dadurch anschaulich machen, daß sich die Oberfläche a c, in paralleler Lage und mit unveränderter Seitenrichtung, an der Linie a d herabbewege, bis sie in der Grundfläche d g eintrifft.

Denkt man sich den schiefen Cylinder mit seiner Seite a d auf einer Ebene liegend, auf welcher derselbe einmal ganz und gar herumbewegt wird, so

entsteht auf der Ebene kein Rechteck, sondern eine Figur, welche von zwey parallelen und gleichen geraden Linien und von zwey krummen Linien eingeschlossen wird.

Da die Cylinder mit den prismatischen Körpern große Aehnlichkeit haben, so muß der Anfänger nunmehr auch hierauf aufmerksam gemacht werden.

Die Planimetrie hat gelehrt, daß man sich die Peripherie eines Kreises, als ein regelmäßiges Vieleck von sehr vielen Seiten vorstellen kann,

Wendet man diese Vorstellungsart auf die Cylinder an, so läßt sich sagen, der Cylinder sey ein Prisma, dessen Grundfläche eine große Zahl von Seiten oder Ecken hat. Der Cylinder zeigt sich also auch als ein prismatischer Körper von sehr vielen Seitenkanten. Stehen diese Kanten auf der Grundfläche senkrecht oder schief, so ist der Cylinder selbst ein senkrechter oder ein schiefer.

Der Begriff: Prisma zeigt sich nunmehr dem Anfänger in seiner großen Allgemeinheit, indem derselbe alle prismatische Körper, vom dreyeckigen Prisma bis zum unendlich eckigen unter sich begreift.

Mit diesen Prismen ist die eine Hauptgattung der stereometrischen Körper abgeschlossen, auf welche nunmehr die pyramidalischen folgen.

Figur 20.

Wenn man sich unter b d c ein gleichseitiges Dreyeck vorstellt, und aus dem Mittelpunkte n eine senk-

rechte Linie n a auf dessen Ebene errichtet, in dieser den willkührlichen Punkt a nimmt, und die geraden Linien a b, a c und a d zieht, so stellt a b c d eine senkrechte dreyeckige Pyramide vor.

Das Dreyeck b c d heißt seine Grundfläche, der Punkt a seine Spitze, die Linie a n, welche von der Spitze zum Mittelpunkte der Grundfläche geht und auf ihr lothrecht ist, dessen Achse.

Die Seitenflächen dieser Pyramide sind die Dreyecke a b c, a d c und a b d. Seine vier Körperwinkel liegen an den Scheitelpunkten a, b, c, d. Jeder von ihnen ist durch drey ebene Winkel begrenzt. Nämlich der Körperwinkel a von den Winkeln b a c, c a d und b a d; jener bey b von a b c, a b d und c b d; jener bey c von a c b, a c d und b c d; jener bey d von a d b, a d c und b d c.

Seine sechs Seitenkanten sind a b, a c, a d, b d, b c und c d.

Obschon man die Entstehung dieser senkrechten dreyeckigen Pyramide auf die vorhin erklärte Weise noch nicht überzeugend erkennt, weil die Construction des Lothes n a noch nicht wissenschaftlich nachgewiesen ist, so läßt sich dieser Körper doch dadurch bilden, daß man über jede der drey Seiten des gleichseitigen Dreyecks b d c, in dessen Ebene, jedoch nach entgegengesetzter Seite, ein gleichschenkeliges Dreyeck construirt, welches jedem der zwey andern congruent ist. Werden diese drey Dreyecke sodann um die Linien b d, d c und c b, oberhalb der Ebene b d c erhoben, so vereinigen sich ihre Spitzen

in dem gemeinschaftlichen Punkte a und schließen den verlangten Körperraum ein.

Figur 21.

Die Zeichnung a b c d stellt eine schiefe dreyeckige Pyramide dar; b c d ist ihre Grundfläche, a ihre Spitze, a b, a c, a d, b d, b c und d c sind ihre sechs Seitenkanten, und a b c, a d c, a b d ihre drey Seitenflächen. Die vier Körperwinkel liegen bey a, b, c und d. Jeder ist von drey ebenen Winkeln umschlossen, welche der Anfänger leicht auffinden und benennen wird.

Weil die gerade Linie a n, welche auf der Grundfläche lothrecht steht, nicht in die Mitte der letztern eintrifft, und auch die Seitenkanten a b, a c und a d ungleich sind, so ist diese Pyramide eine schiefe.

Ferner ist klar, daß man diese Pyramide auch auf irgend eine andere ihrer Seitenflächen legen könne, welche sodann ihre Grundfläche heißt.

Wäre z. B. das Dreyeck a c d diese Grundfläche, so wäre b ihre Spitze; für a b c als Grundfläche wäre d die Spitze, und für a b d fiele die Spitze in c.

Die Entstehung dieser schiefen dreyeckigen Pyramide läßt sich hier schon befriedigend nachweisen. Wenn b c d irgend ein Dreyeck ist, und man nimmt oberhalb seiner Fläche einen willkührlichen Punkt a, zieht durch ihn und den Scheitelpunkt b eine unbestimmte gerade Linie a b h, und führt dieselbe, in steter Berührung mit den Linien b c, c d und d b,

einmal rings um die Grundfläche her, so entstehen die drey Seitenflächen und der körperliche Raum der Pyramide.

Figur 22.

Die Zeichnung a b c f d stellt eine senkrechte viereckige Pyramide vor. Das Rechteck b c f d ist ihre Grundfläche, a ihre Spitze, und a g, welche in der Mitte der Grundfläche senkrecht auftrifft, ihre Achse.

Die vier Seitenflächen sind die Dreyecke a b d, a d f, a f c, und a c b. Wenn die Grundfläche ein Quadrat ist, so sind diese vier Dreyecke unter sich congruent; ist sie aber ein Rechteck, so sind es nur die beyden gegenüberliegenden.

Die fünf Körperwinkel dieser Pyramide befinden sich bey a, b, c, f und d. Der erstere wird von den vier Seitenwinkeln b a d, d a f, f a c und c a b gebildet; jeder der vier andern aber von drey Grenzwinkeln, welche der Schüler leicht auffinden und nennen wird.

Die Entstehung dieser Pyramide kann erst durch die Wissenschaftslehre erkannt werden.

Figur 23.

Die hier dargestellte viereckige Pyramide a b c f d ist eine schiefe, weil die vier Seitenkanten a b, a d, a f und a c unter sich ungleich, und alle unter schiefen Winkeln gegen die Grundfläche geneigt sind.

Die übrigen Anschauungen, welche an diesem Körper zu bemerken sind, wird der Schüler leicht auffinden und mit gehörigen Buchstaben benennen.

Die Entstehung dieses Körpers läßt sich in der Anschauungslehre schon erkennen. Denn wenn man ausserhalb der viereckigen Fläche b c f d einen beliebigen unbeweglichen Punkt a wählt, von diesem nach dem Scheitelpunkte b die unbestimmte gerade Linie a b g zieht, und dieselbe in ununterbrochener Berührung mit b d, d f, f c und c b um die viereckige Grundfläche rings herum führt, so entstehen die vier Seitendreyecke, welche mit der Grundfläche diesen Körper bilden.

Figur 24.

Die Zeichnung b m d n b a stellt einen senkrechten Kegel vor; b m d n b ist seine Grundfläche, c deren Mittelpunkt, c b ihr Halbmesser und b d ihr Durchmesser. Der Punkt a ist die Spitze dieses Kegels und die Linie a c dessen Achse. Da diese auf der Grundfläche senkrecht steht, so heißt der Kegel ein senkrechter.

Wenn dieser senkrechte Kegel von einer Ebene längs der Achse a c geschnitten wird, so bildet die Durchschnittsfläche ein gleichschenkeliges Dreyeck b a d, welches aus den zwey rechtwinkeligen Dreyecken a c b und a c d besteht. Man nennt es das Achsendreyeck. Die Linie a b oder a d wird die Seite des senkrechten Kegels genennt.

Figur 25.

Da, wenn man den Achsenschnitt nach der Richtung amn führt, wiederum ein gleichschenkeliges Dreyeck man gebildet wird, worin an und am, einzeln genommen, so groß sind, wie ab und ac, so heißt dieser senkrechte Kegel auch ein gleichseitiger.

Seine Entstehung läßt sich dadurch versinnlichen, daß das Dreyeck adb sich um seine unbewegliche Cathete ad einmal ganz und gar herumbewegt, wodurch die andere Cathete db die Grundfläche, die Hypotenuse ab aber die Seitenfläche des Kegels beschreibt. Man nennt den Kegel spitzwinkelig, oder rechtwinkelig, oder stumpfwinkelig, nachdem dessen Winkel an der Spitze, oder bac, ein spitzer Winkel, oder ein rechter, oder ein stumpfer ist.

Figur 26.

Die Zeichnung abmdnb stellt einen schiefen Kegel dar; bndmb ist seine Grundfläche, a ist seine Spitze, ac seine Achse, welche mit der Grundfläche schiefe Winkel bildet, woher denn dieser Kegel den Namen des schiefen erhalten hat.

Wird derselbe durch die Punkte a, b und d vermittelst einer Ebene geschnitten, so bildet sich das Achsendreyeck bad, worin ad kleiner, ab aber größer als ac ist. Weil sowohl ad, als ab eine Seite dieses Kegels ist, so heißt der schiefe Kegel auch ein ungleichseitiger.

Seine Entstehung läßt sich daraus begreifen, daß man von dem ausserhalb seiner Grundfläche genom=

menen unbeweglichen Punkte a eine gerade Linie a b g von unbestimmter Länge, den Kreis in b berührend, zieht, und dieselbe, in steter Berührung mit der Peripherie dieses Kreises, einmal ganz um dieselbe herumführt.

Figur 27.

Wenn man den schiefen Kegel a b n c m b durch die Punkte a, n und m schneidet, wobey angenommen wird, daß die gerade Linie m n auf b c senkrecht steht, so erscheint n a m als Achsendreyeck, und die Anschauung lehrt, daß a n so groß sey, als a m. Das Achsendreyeck ist also hier auch ein gleichschenkeliges. Jeder andere Achsenschnitt aber bildet ein ungleichseitiges Achsendreyeck.

Gleichwie die Prismen mit den Cylindern, nach den frühern Betrachtungen, große Aehnlichkeit zeigen, so findet auch zwischen den Pyramiden und Kegeln ein ähnliches Verhalten statt, welches hier zu erörtern ist.

Durch die seitherigen Anschauungen wird es dem Schüler leicht seyn, den Begriff einer Pyramide im Allgemeinen zu bilden, welcher aus dem Inbegriffe dessen hervorgeht, was dreyseitige, vierseitige und überhaupt vielseitige Pyramiden mit einander gemein haben.

Eine Pyramide überhaupt ist demnach ein Körper, welcher von irgend einer geradlinig begrenzten ebenen Figur als Grundfläche, und von so viel

Dreyecken als Seitenflächen eingeschlossen wird, als wie viele Seiten ihre Grundfläche hat.

Die Pyramiden heißen senkrechte oder schiefe, je nachdem ein von ihrer Spitze auf die Grundfläche gezogenes Loth in den Mittelpunkt dieser Grundfläche eintrifft oder nicht.

Das Tetraëder ist daher 1) eine Pyramide, 2) eine senkrechte, 3) eine regelmäßige Pyramide.

Da man sich den Kreis als ein regelmäßiges Vieleck von unendlich vielen Seiten vorstellt, so kann jeder Kegel als eine Pyramide von unendlich vielen Seitenkanten betrachtet werden, und es ist klar, daß die kegelförmigen Körper als eine besondere Gattung der pyramidalischen erscheinen, welche eine unendliche Reihe bilden, die mit der dreyeckigen Pyramide beginnt und mit dem Kegel abgeschlossen wird.

Wie wichtig diese Betrachtungen für die Wissenschaftslehre sind, wird die Folge lehren,

Somit haben sich die pyramidalischen Körper als die zweyte Hauptgattung der stereometrischen Objecte gezeigt.

Figur 28.

Wenn der Kreis a n g b d a von dem Durchmesser a b in zwey Hälften getheilt wird, und man denkt sich, der Halbkreis a n g b a drehe sich um den unbeweglichen Durchmesser a b, als dessen Achse, einmal ganz und gar herum, so beschreibt die halbe Peripherie a n g b die Kugelfläche, innerhalb deren Grenzen der Kugelraum sich befindet. Auch

kann man sich denken, daß durch die Umdrehung des ganzen Kreises a n g b d a um den Durchmesser a b dieser Kugelraum entstehe.

Dieser Kreis, welcher die Entstehung der Kugel aufklärt, heißt der erzeugende Kreis; sein Mittelpunkt c ist auch Mittelpunkt der Kugel, so wie sein Halbmesser c a und sein Durchmesser b a Halbmesser und Durchmesser der Kugel ist.

Die Punkte a und b nennt man die Pole der Kugel, a b ihre Achse.

Wenn man diese Kugel vermittelst einer Ebene durch ihren Mittelpunkt c nach der Richtung d g durchschneidet, so bildet die Durchschnittsfläche einen Kreis, welcher hier durch d h g v d dargestellt wird; d g und h v sind dessen Durchmesser.

Alle Kreise, welche durch ähnliche Durchschnitte entstehen, sind einander congruent, und heißen größte Kreise der Kugel. Jeder von ihnen ist dem Erzeugungskreise gleich.

Wird aber die Kugel nicht durch den Mittelpunkt, sondern z. B. nach der Richtung m n mit einer Ebene durchschnitten, so entsteht als Durchschnittsfläche ebenfalls ein Kreis, welcher aber kleiner ist, als der größte Kugelkreis. Die Anschauung lehrt, daß diese Kreise um so kleiner werden, je entfernter der Schnitt von dem Mittelpunkte Statt findet.

Das Stück des Kugelraumes, welches zwischen dem Kreise um m n und dem Stücke der Kugelfläche m a n sich befindet, heißt ein Abschnitt der Kugel. Zieht man aber den Halbmesser c m und denkt

sich, er werde rings um die Peripherie des Kreises um n m geführt, so entsteht in der Kugel ein senkrechter Kegel, dessen Grundfläche der Kreis um m n, und dessen Spitze der Punkt c ist. Dieser Kegel und der vorhin genannte Kugelabschnitt zusammengenommen, bilden den Ausschnitt der Kugel, welcher zwischen der Kugelfläche m á n und der Kegelfläche m c n enthalten ist.

Zum Schlusse dieses Cursus müßen noch nachfolgende Begriffe bestimmt und durch Anschauungen aufgeklärt werden.

1) Körperwinkel decken einander, wenn sie mit ihren Scheitelpunkten, Seitenkanten und Seitenflächen so in einander fallen, daß sie nur einen einzigen Körperwinkel bilden. Auf die Länge ihrer gegenseitigen Kanten kömmt es bey diesem Decken so wenig an, als das Decken zweyer ebenen Winkel von der Länge ihrer Schenkel abhängig ist.

2) Hieraus folgt, daß Körperwinkel, welche sich decken, einander gleich sind; und umgekehrt.

3) Bey den Körpern muß man, so wie bey den ebenen Figuren, ihre Gleichheit, ihre Aehnlichkeit und ihre Congruenz unterscheiden. Die Bestimmungen dieser Begriffe sind folgende:

4) Zwey Körper heißen gleich, wenn beyde den nämlichen Körperraum einschliesen, ohne daß sie darum auch einerley Gestalt haben. Die Gleichheit ist daher die Uibereinstimmung dieser Körper in ihrer Größe. Wenn z. B.

Figur 29.

Das senkrechte Parallelopipedum am in der Mitte c seiner Kante av durch eine Ebene, welche parallel mit seiner Grund- und Oberfläche ist, durchschnitten wird, so lehrt die Anschauung, daß sowohl der Körper ad, als auch der Körper cm wiederum ein senkrechtes Parallelopipedum ist. Wird nun der Körper ad neben den Körper cm so gestellt, wie es die Anschauung lehrt, so entsteht ein zweytes Parallelopipedum cw, welches dem zuerst gegebenen am, dem körperlichen Raume nach, gleich ist, obschon beyde an Gestalt verschieden sind. Die folgende Wissenschaftslehre wird zeigen, daß auch Körper, welche sonst ganz verschieden gestaltet sind, z. B. eine dreyeckige Pyramide und eine viereckige, ein dreyeckiges Prisma und ein Kegel, ein Cylinder und eine Kugel, u. s. f., gleiche Körpergröße haben können.

5) Die Aehnlichkeit der Körper besteht in der Übereinstimmung ihrer Gestalt, bey Verschiedenheit ihrer Größe. So sind z. B. alle Kugeln von verschiedenem Durchmesser, alle Würfel von ungleichen Seitenlinien u. s. f. einander ähnlich, denn die kleine Kugel hat mit der größern, der große Würfel mit dem kleinen die körperliche Gestalt gemein, obschon sie an Größe verschieden sind. Es sey

Figur 30.

abcd eine dreyseitige Pyramide, welche von einer durch den willkührlichen Punkt m mit der Grundfläche bcd parallelen Durchschnittsebene geschnitten

wird, so entsteht eine kleinere dreyeckige Pyramide a m g n, welche der ganzen Pyramide a b c d ähnlich ist. Eine genauere Betrachtung dieser beyden Pyramiden lehrt, daß sie den Körperwinkel a gemein haben, und daß die Körperwinkel bey m, g, n, den Körperwinkeln bey b, c, d, in genannter Ordnung, vollkommen gleich sind; auch daß die Seitenflächen a m g und a b c; a g n und a c d, endlich a m n und a b d paarweiße gleiche Neigung gegen die Fläche m g n und b c d haben. Endlich sieht man, daß die Seitenkanten a m und a b, a g und a c, a n und a d unter sich gleiche geometrische Verhältnisse bilden. Weil nun die Anschauung ferner lehrt, daß die Seitenflächen a m g und a b c, a n g und a c d, a m n und a b d, m n g und b d c paarweise ähnliche Dreyecke sind, so ist klar, daß beyde Pyramiden in ihrer Gestalt vollkommen übereinstimmen, in ihrer Größe aber sehr verschieden sind. Daher nennt man sie ähnliche Pyramiden.

Wenn man einen Kegel parallel mit der Grundfläche durch eine Ebene schneidet, so ist das zwischen der Durchschnittsebene und der Spitze enthaltene Kegelstück ein kleinerer Kegel, welcher dem ganzen Kegel, wovon er einen Theil bildet, ähnlich ist.

6) Die Congruenz, d. h. die gänzliche Uebereinstimmung zweyer Körper besteht darin, daß sie sowohl an Größe, als auch an Gestalt übereinkommen. Die Congruenz geht daher aus Verbindung der Gleichheit mit der Aehnlichkeit hervor. Man denke sich

Figur 31.

Das senkrechte Parallelopidedum am in der Mitte c seiner Kante av durch eine mit dessen Grund- und Oberfläche parallele Ebene durchschnitten, so entstehen die beyden senkrechten Parallelopipeden ad und cm, welche einander vollkommen congruent sind. Die Anschauung lehrt nämlich, daß man jenen Körper so in diesen, oder diesen so in jenen bringen könne, daß ihre sämmtliche Grenzen genau in einander fallen, wodurch beyde Körper nur einen einzigen bilden. Man sagt von ihnen, daß sie sich decken.

Zwey Kugeln von einerley Durchmesser stellen ebenfalls zwey congruente Körper dar; da die eine dergestalt in die andere gestellt werden kann, daß beyde nur eine und dieselbige Kugel bilden. — Auch können zwey Würfel, oder zwey Tetraëder von gleichen Seitenlinien zur Erläuterung des Begriffs von der Congruenz der Körper dienen.

Vergleicht man diese Erklärungen mit jenen, welche bereits in der Planimetrie vorgekommen sind, so ergibt sich hieraus eine neue Uebereinstimmung zwischen ebenen Figuren und Körpern, indem die Begriffe von Gleichheit, Aehnlichkeit und Congruenz von beyden Arten dieser räumlichen Gegenstande gelten.

Uibrigens leuchtet es von selbst ein, daß die befriedigende Construction dieser Begriffe nicht in die stereometrische Anschauungslehre, sondern in die Wissenschaftslehre gehöre.

Schließlich bemerke man, daß unter der Höhe eines prismatischen Körpers eine senkrechte Linie ver-

standen werde, welche von irgend einem Punkte der Oberfläche auf die Grundfläche, oder auf deren Verlängerung, gezogen wird.

Daher stellt bey senkrecht prismatischen Körpern irgend eine Seitenkante, bey senkrechten Cylindern die Achse oder die Seite, die Höhe vor.

Bey pyramidalischen Körpern versteht man unter der Höhe das von ihrer Spitze auf die Grundfläche, oder auf ihre Verlängerung, gezogene Loth.

Bey senkrechten Pyramiden und bey dem senkrechten Kegel ist daher die Achse mit der Höhe einerley.

Schlußwort.

Wenn der Schüler, unter Anleitung des Lehrers oder durch Selbststudium, bis hieher gekommen ist, so besitzt er hinlängliche Vorbereitung zum Eintritt in die stereometrische Wissenschaftslehre. Der Scharfblick des Auges und des Geistes ist gestärkt, und er hat nicht mehr mit der den Anfängern meist Schwierigkeit verursachenden Erkenntniß jener Anschauungen zu kämpfen, welche dieser Lehre zum Grunde liegen. Ob er aber wirklich fähig sey, dieses neue Gebiet mit Nutzen zu betreten, wird von dem Ausspruche des verständigen Lehrers, oder von einer scharfen Selbstprüfung abhängen. Sollten sich noch Dunkelheiten in den Anschauungen, oder Unbestimmtheiten in den Begriffen zeigen, so müßte Dasjenige nochmals nachgeholt werden, was zu größerer Klarheit oder Schärfe zu bringen ist.

Der stereometrischen Anschauungs- und Wissenschaftslehre zweyte Abtheilung.

Die stereometrische Wissenschaftslehre.

Erster Cursus.

Stereometrische Vorbereitungslehren.

Erster Cursus.

Stereometrische Vorbereitungslehren.

I.

Die Lage der Ebenen und Linien, gegen Ebenen.

§. 1.

Grundsätze. I. Es gibt einen körperlichen Raum, der sich nach drei Hauptrichtungen ins Unendliche erstreckt. Diese Richtungen bezeichnet man mit Länge, Breite und Tiefe.

II. Auser diesen drey Hauptrichtungen lassen sich in dem Raume unzählig viele andere denken, deren jede ebenfalls ins Unendliche geht.

III. Diesen unendlichen Körperraum kann man sich aber allseitig begrenzt vorstellen, wodurch der geometrische Körper entsteht.

IV. Die Grenzen des geometrischen Körpers sind Flächen, welche nur nach zwey Hauptrichtungen ausgedehnt sind, die man Länge und Breite nennt.

V. Diese Flächen sind entweder ebene Flächen, oder einfach gekrümmte, oder allseitig gekrümmte.

VI. Die Grenzen dieser Flächen werden von Linien gebildet, woran man nur eine Ausdehnung, nach der Länge, erkennt.

VII. Diese Linien erscheinen entweder als gerade oder als krumme Linien.

VIII. Auch die Linien haben ihre Grenzen, welche man Punkte nennt. Der Punkt ist somit die Grenze aller Ausdehnung und an sich selbst ohne alle Ausdehnung.

IX. Da der Durchschnitt zweyer Linien ihre gemeinschaftliche Grenze bezeichnet, so muß er ein Punkt seyn, und es lassen sich überall Punkte annehmen, wo man sich den Durchschnitt zweyer Linien denken kann.

X. Daher können sowohl in jeder Linie, als in jeder Fläche und in jedem Körper, wo man nur immer will, Punkte angenommen werden.

§. 2.

Erklärung. I. Der Gegenstand der Stereometrie ist der Körperraum. Daher ist die stereometrische Wissenschaftslehre jener Theil der Raumlehre, welcher die Entstehung, Vergleichung nnd Berechnung der wichtigsten der allseitig eingeschlossenen körperlichen Räume wissenschaftlich darstellt.

II. Die stereometrische Anschauungslehre ist aber jener Theil der Raumlehre welcher die stereo-

metrischen Anschauungen und Begriffe zur Klarheit bringt.

III. Die stereometrische Wissenschaftslehre umfaßt einen elementaren und einen höhern Theil. Jener hat die Betrachtung der prismatischen, pyramidalischen und kugelförmigen Körper; dieser aber die Untersuchung solcher Körper zum Gegenstande, welche durch Bewegung anderer krummen Linien, als die Kreislinie ist, entstehen. Nicht die höhere, sondern nur die Elementar-Stereometrie gehört zum Plane gegenwärtiger Schrift.

§. 3.

Anmerkung. Diese Erklärung (§. 2.) macht keinen Anspruch auf logische Vollkommenheit, welche ihr schon deshalb nicht zu Theil werden kann, weil die Grenzen der niedern und höhern Körperlehre so wenig scharf gezogen sind, als jene zwischen der sogenannten niedern und höhern Planimetrie. Doch dient sie dazu, den Anfänger über den Hauptinhalt beyder Abtheilungen der Stereometrie aufzuklären.

§. 4.

Grundsätze. I. Wenn irgend ein stereometrischer Körper durch eine Ebene geschnitten wird, so ist der Durchschnitt wiederum eine Ebene.

II. Die Grenzen dieser Durchschnittsfläche können theils gerade, theils krumme Linien seyn.

III. Der Durchschnitt zweyer Flächen ist eine Linie. Denn er ist die gemeinschaftliche Grenze jeder dieser beyden Flächen.

IV. Der Durchschnitt zweyer einfach gekrümmten Flächen kann theils eine gerade Linie (z. B. bey zwey Cylinderflächen) theils eine krumme Linie seyn. Sind aber die krummen Durchschnittsflächen beyde doppelt gekrümmt, (z. B. bey zwey Kugelflächen) oder ist es auch nur eine von ihnen) (z. B. bey einer Kugel- und einer Kegelfläche) so muß ihr Durchschnitt eine krumme Linie seyn.

V. Wenn eine krumme Fläche von einer Ebene geschnitten wird, so kann der Durchschnitt, bey einer einfach gekrümmten Fläche, theils gerade, theils krumm seyn; ist aber die krumme Fläche doppelt gekrümmt, so muß die Durchschnittslinie eine krumme seyn.

VI. Die Durchschnittslinie zweyer Ebenen ist immer eine gerade, da beyde Flächen nichts Gekrümmtes in ihrer ganzen Ausdehnung haben.

VII. In jeder Ebene lassen sich irgend zwey willkührlich gewählte Punkte durch eine gerade Linie verbinden, welche ganz und gar in diese Ebene fällt. Denn die Ebene ist nach allen Richtungen eine gerade und nach keiner eine krumme Fläche.

VIII. Jeder von zwey geraden sich in ihrem Endpunkte schneidenden Linien gebildete Winkel kann mit seinen beyden Schenkeln dergestalt in eine Ebene fallen, daß nichts von ihm ausserhalb derselben, oder ihrer Verlängerung liegt. Denn wenn man einen seiner Schenkel in diese Ebene legt, und den ganzen Winkel dergestalt um denselben, als unbewegliche Achsenlinie, dreht, daß dessen anderer Schenkel der Ebene immer näher rückt, so muß einmal irgend ein Punkt

dieses Schenkels in die Ebene fallen. Da sich aber der Scheitelpunkt dieses Schenkels schon in der Ebene befindet, so hat der bewegte Schenkel zwey Punkte in dieser Ebene, und fällt somit (nach VII.) ganz hinein.

IX. Daher kann man durch jede zwey gerade Linien, welche einen Winkel bilden, eine Ebene legen; aber auch nur eine einzige. Denn jede andere würde in die erste fallen, und mit ihr einerley seyn. Ein solcher Winkel heißt daher mit Recht ein ebener Winkel.

X. Wenn man den Schenkel eines ebenen geradlinigen Winkels über seinen Scheitel verlängert, so kann die Verlängerung nicht ausserhalb des Winkels Ebene fallen. Folglich liegt auch der Nebenwinkel in der nämlichen Ebene. Das Nämliche gilt auch von den, durch Verlängerung des andern Schenkels, entstehenden Scheitelwinkeln.

XI. Irgend drey im körperlichen Raume willkührlich gewählte, nur nicht in gerader Linie liegende Punkte befinden sich in einerley Ebene. Denn wenn man von irgend zwey derselben nach dem dritten zwey gerade Linien zieht, so bilden sie einen Winkel, in dessen Ebene jeder Schenkel, folglich auch jeder ihrer Endpunkte und somit auch die gerade Verbindungslinie zwischen beyden liegt.

XII. Da sich die Ebene irgend eines geradlinigen Winkels, welcher um einen seiner unbeweglichen Schenkel bewegt wird, ebenfalls um diesen Schenkel, als Achse, rings herum drehen läßt, so kann die Lage

dieser Ebene nur dadurch eine fest bestimmte werden, daß irgend ein dritter Punkt angenommen wird, bey dessen Erreichen diese Bewegung aufhört. Daher wird die feste Lage einer Ebene durch drey Punkte bestimmt, welche nicht in einer einzigen geraden Linien liegen.

§. 5.

Lehrsatz. Wenn zwey gerade Linien in einer gegebenen Ebene einen Winkel bilden, und es erhebt sich aus ihrem Scheitelpunkte eine gerade Linie dergestalt über diese Ebene, daß sie auf jedem Schenkel dieses Winkels lothrecht steht, so bildet dieselbe mit jeder andern geraden Linie, welcher aus ihrem Berührungspunkte mit der Ebene in derselben gezogen wird, einen rechten Winkel.

Es sey (Fig. 1.) g n f der gegebene Winkel, und n a die gerade, sich über dessen Ebene erhebende Linie, welche mit n f und n g rechte Winkel bildet, so wird diese n a auch mit der durch n willkührlich gezogenen n d einen rechten Winkel a n d bilden.

Vorbereitung zum Beweise.

Man verlängere f n und nehme n b = n f; desgleichen verlängere man g n und mache n c = g n, ziehe die geraden b g und c f, verlängere d n nach h, und ziehe die geraden a b, a h, a g, a f, a d und a c.

Beweis. I. Da fn = bn, gn = cn und W. cnf = W. bng, so ist △ cnf ≅ △ bng, folglich W. nfd = W. nbh. Da nun auch W. dnf = W. hnb und nf = nb, so ist △ dnf ≅ △ hnb und dn = hn.

II. Da fn = bn, an = an und W. anf = W. anb = R, so ist △ anf ≅ △ anb und af = ab. Aus gleichen Gründen ist auch △ anc ≅ △ ang, und ac = ag. Daher haben die Dreyecke afc und agb die drey Seiten gemein und sind daher congruent, woraus W. afd = W. abh folgt.

III. Demnach haben ferner die Dreyecke adf und ahb die Seiten af und ab, ferner fd und bh nebst dem eingeschlossenen W. afd und abh gemein, und sind daher ebenfalls congruent, woraus ad = ah folgt.

IV. Weil nun die Dreyecke and und anh die drey Seiten gemein haben, so decken sie sich, und es ist W. and = W. anh = R.

§. 6.

Zusatz. Da die Annahme der geraden Linie nd willkührlich war, so folgt, daß die Linie na, wenn sie auf zwey andern nf und ng lothrecht steht, auch mit jeder andern, welche durch n in der Ebene bcfg gezogen werden kann, einen rechten Winkel bildet. Folglich steht an auf der Ebene bcfg lothrecht, und die in der stereometrischen Anschauungslehre gegebene Erklärung von der auf einer Ebene senkrecht

stehenden Linie ist durch vorstehenden Lehrsatz eine Sacherklärung geworden.

§. 7.

Lehrsatz. Wenn man aus dem Endpunkte einer geraden Linie mehrere andere gerade auf sie senkrecht zieht, so liegen dieselben alle in einer und der nämlichen Ebene.

Es seyen auf a b (Fig. 2.) im Punkte b die geraden b n, b d und b c lothrecht; so, daß W. a b n = W. a b d = W. a b c = R ist, so liegen b n, b d, b c in einerley Ebene.

Beweis. Wenn die Linien b n, b d, b c nicht in einerley Ebene lägen, so müßte, wenn man die Ebene des W. c b d gehörig verlängert, die Linie b n entweder oberhalb oder unterhalb dieser Ebene liegen.

Sollte b n oberhalb derselben liegen, so kann man sich durch die Punkte a, b, n eine Ebene denken, welche die Ebene x y, worin sich b d und b c befindet, in der geraden Linie b m durchschneidet. Da nun a b auf x y lothrecht steht, so ist W. a b m = R. Nach der Annahme ist aber auch W. a b n = R. Folglich müßte W. a b m = W. a b n seyn, welches nicht möglich ist.

Aus gleichen Gründen kann auch die Linie b n nicht unterhalb der Ebene des W. d b c fallen.

§. 8.

Anmerkung. Man erkennt sogleich, daß von den beyden vorhergehenden Lehrsätzen einer der umgekehrte des andern ist.

§. 9.

Lehrsatz. Wenn jede von zwey geraden Linien auf der nämlichen Ebene lothrecht steht, so sind diese beyde Linien unter sich gleichlaufend.

Es sey (Fig. 3.) sowohl a b als g d auf der Ebene x y senkrecht, so ist a b mit g d gleichlaufend.

Vorbereitung zum Beweise.

Man verbinde die Punkte b und d durch die gerade b d, errichte auf sie aus d das Loth d c in x y, mache d c = a b, und ziehe die geraden a d, a c und b c.

Beweis. I. Da a b = d c, b d = b d und W. a b d = W. b d c = R ist, so sind die Dreyecke a b d und b d c congruent. Daher ist a d = b c.

II. Weil nun die Dreyecke a b c und a d c die drey Seiten, einzeln genommen, gemein haben, so decken sie sich und W. a d c ist ein rechter.

III. Da ferner W. g d c ein rechter ist, so steht c d auf d g, d a, und d b lothrecht. Daher liegt d g, d a, d b in einerley Ebene. Folglich

sind auch d g und a b in dieser Ebene, und müßen, weil W. a b d = W. g d b = R ist, parallele oder gleichlaufende Linien seyn.

§. 10.

Lehrsatz. Wenn eine gerade Linie auf einer Ebene lothrecht steht, und eine andere gerade mit ihr parallel ist, so steht auch letztere auf der Ebene senkrecht.

Es sey a b auf x y lothrecht, und g d mit a b gleichlaufend, so muß auch g d ein Loth auf x y seyn.

Beweis. I. Man ziehe die nämlichen Hülfslinien wie im vorigen §., so ist W. g d b = R.

II. Da nun, nach dem Vorigen, c d auf a d b senkrecht steht, d g aber in der Ebene a d b sich befindet, so ist auch W. c d g = R.

III. Daher bildet g d sowohl mit b d als mit d c einen rechten Winkel und steht somit auf b d c, d. h. auf x y senkrecht.

§. 11.

Lehrsatz. Wenn mit einer geraden Linie jede von zwey andern geraden parallel ist, diese drey gerade Linien aber nicht in einerley Ebene liegen, so ist auch jede der zwey letzten Linien mit der andern gleichlaufend.

Es sey (Fig. 4.) mit c d sowohl a b als f g parallel; so aber, daß a b und f g mit c d nicht

in einer Ebene liegen, so ist auch a b mit f g parallel.

Beweis. I. Man nehme in c d den willkührlichen Punkt n, errichte aus ihm auf c d das Loth n m in der Ebene a c d b, welches die a b in m schneidet; desgleichen errichte man aus n auf c d in der Ebene c f g d das Loth n o, welches f g in o schneidet, und ziehe die gerade Verbindungslinie m o.

II. Da W. c n m = W. c n o = R ist, so steht c n auf m n o senkrecht. Da nun a m sowohl als f o mit c n parallel ist, so muß a m und f o auf m n o lothrecht seyn. Folglich ist auch a b mit f g gleichlaufend.

§. 12.

Lehrsatz. Wenn man aus dem Scheitel eines gegebenen Winkels eine gerade Linie zieht, welche sich über dessen Ebene erhebt, in ihr einen willkührlichen Punkt annimmt, und aus ihm mit jedem Schenkel dieses Winkels eine Parallele nach der nämlichen Seite der geraden Verbindungslinie zieht, so entsteht ein Winkel, welcher dem gegebenen gleich ist.

Es sey (Fig. 5.) o b p der gegebene Winkel, b a die sich über seine Ebene erhebende Linie und a n mit b p, a m mit b o gleichlaufend, so ist W. m a n = W. o b p.

Beweis. I. Man mache bg = af, bd = ac und ziehe die Verbindungslinien dg, cf, cd, fg.

II. Hier ist, weil af mit bg gleich und parallel ist, afgb ein Parallelogramm und fg mit ab gleichlaufend. Aus gleichem Grunde ist auch acdb ein Parallelogramm und cd parallel mit ab.

III. Da nun sowohl fg als cd mit ab parallel, auch fg = cd, so muß auch cfgd ein Parallelogramm und cf = dg seyn. Daher haben die Dreyecke caf und dbg die drey Seiten gemein, und es ist W. caf = W. dbg d. h. W. man = W. obp.

§. 13.

Aufgabe. Von einem ausserhalb einer Ebene gegebenen Punkte ein Loth auf diese Ebene zu construiren.

Es sey (Fig. 6.) die Ebene xy und ausserhalb ihr der Punkt a gegeben, aus welchem man auf xy das verlangte Loth ziehen soll.

Auflösung. 1. Man nehme in xy eine willkührliche gerade Linie bd und ziehe von a auf bd das Loth ac.

II. Aus c errichte man auf bd in xy ein Loth cm und auf cm ziehe man aus a die senkrechte Linie aq, so steht aq auf xy lothrecht.

Beweis. I. Man ziehe durch q in xy die gerade ng mit bd gleichlaufend.

II. Da W. dcq = W. dca = R ist, so steht dc auf acq lothrecht. Weil aber gq mit

d c parallel ist, so steht auch g q auf a q c lothrecht. Demnach ist W. a q g = W. a q c = R, und somit a q ein Loth auf x y.

§. 14.

Zusatz. I. Von einem ausserhalb einer Ebene gegebenen Punkte kann man auf diese Ebene nur ein einziges Loth ziehen. Denn wenn es ausser a q noch ein anderes Loth von a auf x y gäbe, so sey z. B. a c dieses Loth. Verbände man nun die Punkte c und q durch die gerade c q, so entstände ein Dreyeck a c q, worin sowohl bey c als bey q ein rechter Winkel wäre, was unmöglich ist.

II. Auch ist das von einem Punkte ausserhalb einer Ebene auf dieselbe gezogene Loth die kürzeste Linie, welche von jenem Punkte zur Ebene möglich ist. Denn da W. a q c immer ein rechter ist, so muß W. a c q immer ein spitzer seyn, woraus folget, daß a c jedesmal größer als a q ist.

§. 15.

Aufgabe. Aus einem innerhalb einer Ebene gegebenen Punkte ein Loth auf diese Ebene zu errichten.

Es sey in x y der Punkt t gegeben, aus welchem das Loth t s auf x y soll errichtet werden.

Auflösung. Man nehme ausserhalb x y den willkührlichen Punkt a, und construire auf x y das Loth a q, ziehe sodann durch t eine Linie t s

mit q a gleichlaufend, so ist diese t s das verlangte Loth.

Beweis. Da a q auf x y lothrecht, s t aber mit a q gleichlaufend ist, so muß auch s t ein Loth auf x y seyn.

§. 16.

Zusatz. Aus einem innerhalb einer Ebene willkührlich gewählten Punkte kann auf diese Ebene nur ein einziges Loth errichtet werden. Denn wenn es ausser t s noch ein anderes Loth z. B. t v auf x y gäbe, so könnte man durch s t v eine Ebene legen, welche x y in t p schneiden müßte, und hier wäre W. s t p = W. v t p = R, welches unmöglich ist, da t v zwischen t p und t s fällt.

§. 17.

Zusatz. Wenn zwey Ebenen einander schneiden, und eine gerade Linie auf der einen von ihnen senkrecht steht, so kann sie nicht auch auf der andern lothrecht seyn. Es werde x y durch die Ebene a b d in b d geschnitten und q a stehe auf x y senkrecht, so kann q a nicht auch ein Loth auf a b d seyn. Denn der W. a c q ist der Neigungswinkel der beyden Durchschnittsebenen, und der W. a muß, weil W. a q c = R ist, nothwendig ein spitzer seyn. Folglich steht q a auf der Ebene a b d schief.

§. 18.

Zusatz. Wenn daher eine gerade Linie auf zwey Ebenen lothrecht steht, so sind diese Ebenen gleichlau-

fend. Denn wären sie es nicht, so müßten sie sich irgendwo durchschneiden und die gerade Linie, welche auf einer lothrecht steht, müßte auf der andern schief stehen.

§. 19.

Aufgabe. Mit einer gegebenen Ebene eine parallele Ebene zu construiren. Es sey (Fig. 7.) v w die gegebene Ebene, und man soll eine andere mit ihr gleichlaufend construiren.

Auflösung. Man nehme in w v die Linien n d, n g, welche den Winkel d n g bilden nach Belieben, errichte aus n auf v w das Loth n a, ziehe durch den willkührlichen Punkt a die a f mit n d und die a h mit n g gleichlaufend, und lege durch f a h die Ebene x y, so ist diese mit v w gleichlaufend.

Beweis. Denn die Verbindungslinie a n steht sowohl auf v w, als auf x y lothrecht.

§. 20.

Zusatz. Eine gerade Linie, welche auf einer von zwey gleichlaufenden Ebenen lothrecht ist, steht auch senkrecht auf der andern. Denn eine gerade Linie kann nicht zugleich auf zwey sich schneidenden Ebenen senkrecht seyn, und durch einen bestimmten Punkt kann man mit einer gegebenen Ebene nur eine parallele Ebene legen.

§. 21.

Lehrsatz. Wenn eine gerade Linie auf einer Ebene senkrecht steht, und man

legt durch diese Linie irgend eine Ebene, so ist auch diese Ebene auf der ersten lothrecht.

Es sey (Fig. 6.) a q auf x y senkrecht und man lege durch n a g eine Ebene, so muß auch diese auf x y lothrecht seyn.

Beweis. Wenn man aus q auf n g in der Ebene x y das Loth q c zieht, so ist weil W. a q g = a q c = R, der Neigungswinkel der Ebene n a g gegen x y ein rechter; daher auch die Ebene n a g auf x y lothrecht.

§. 22.

Zusatz I. Wenn eine Ebene auf der andern lothrecht steht und man zieht aus einem in jener willkührlich gewählten Punkte auf ihre Durchschnittslinie ein Loth, so muß dieses auch auf der zweyten Ebene senkrecht seyn. Wenn die Ebene a n g die Ebene x y in n g schneidet, und a q ist lothrecht auf n g, so ist auch a q lothrecht auf x y. Denn da die Ebene n a g auf x y senkrecht steht, so ist ihr Neigungswinkel a q c = R. Weil aber auch W. a q g = R ist, so steht a q auf x y lothrecht.

II. Wenn man daher aus a auf x y ein Loth zieht, so muß dieses in der durch n g gehenden und auf x y lothrecht stehenden Ebene n a g liegen; da vom Punkte a nur ein Loth auf x y möglich ist.

III. Desgleichen folgt, daß wenn x y von der auf ihr senkrecht stehenden Ebene n a g in n g ge-

schnitten wird, ein aus q auf n g in der Ebene n a g errichtetes Loth auch auf x y senkrecht sey, weil auch durch q auf x y nur ein Loth möglich ist.

IV. Der Durchschnitt b d der beyden Ebenen b a d und x y steht auf der Ebene ihres Neigungswinkels a c q lothrecht. Folglich steht sowohl die Ebene b a d, als auch x y auf dem Dreyecke a c q, als Ebene des Neigungswinkels, senkrecht; und umgekehrt muß auch das Dreyeck a c q sowohl auf der Ebene b a d, als auf x y lothrecht stehen.

§. 23.

Lehrsatz. Wenn zwey parallele Ebenen von einer dritten Ebene geschnitten werden, so sind:

I. Die beyden innern Winkel zusammen = 2 R,

II. Jeder äußere Winkel ist seinem zugehörigen innern gleich,

III. Sind auch die zugehörigen Wechselwinkel einander gleich.

Es sey (Fig. 8.) die Ebene a b mit der Ebene c d gleichlaufend, und beyde werden von x y in den geraden Linien f i und l t durchschnitten, so ist, wenn man durch h und r die gerade m h r g auf f i und l t lothrecht, und eben so auch die geraden o h n und w r v senkrecht auf f i und l t zieht,

I. W. n h r + W. v r h = W. o h r + W. w r h = 2 R,

II. W. m h n = W. m r v; W. m h o = W. m r w; W. g r v = W. g h n; W. g r w = W. g h o.

III. W. n h r = W. h r w; W. v r h = W. o h r.

Beweis. I. Da a b mit c d gleichlaufend ist, so müßen auch f i und l t, welche in der Ebene x y liegen, parallel seyn. Denn durchschnitten sich diese Linien irgendwo, so müßten sich daselbst auch die Ebenen a b und c d durchschneiden, was gegen die Voraussetzung ihres Gleichlaufens ist.

II. Da W. i h n = W. t r v = R ist, und h i parallel mit r t, so muß auch h n mit r v gleichlaufend seyn, wie man leicht findet, wenn h n = r v gemacht und i n und t v gezogen wird. Daher sind auch o n und w v Parallelen, und die obigen drey Sätze werden nun gerade so für die Durchschnittsebenen bewiesen, wie sie in der Planimetrie für zwey Parallelen o n und w v dargethan werden, welche eine dritte m g in h und r durchschneidet.

§. 24.

Anmerkung. Auch sieht man, daß die drey Sätze: wenn zwey Ebenen a b und c d von einer dritten x y in f i und l t so durchschnitten werden, daß

I. W. n h r + W. v r h = 2 R, oder

II. W. m h n = W. m r v, oder

III. W. n h r = W. w r h,

so sind beyde Ebenen gleichlaufend, auf gleiche Weise,

wie dieses in der ebenen Geometrie geschieht, bewiesen werden.

§. 25.

Lehrsatz. Wenn zwey schiefe Linien auf einer Ebene so aufgerichtet sind, daß sie mit einander parallel laufen, so haben sie gegen diese Ebene einerley Neigung.

Es seyen (Fig. 9.) a b und c d aus den in der Ebene x y willkührlich gewählten Punkten b und d dergestalt gezogen, daß b a und d c parallel ist, so müssen beyde Linien gegen x y gleiche Neigung haben.

Beweis. Man fälle aus a das Loth a m und aus c das Loth c n auf x y, und ziehe die geraden Linien b m und d n. Hier ist a m mit c n gleichlaufend. Da aber auch a b und c d gleichlaufend sind, so ist W. a = W. c, und es muß, weil W. m = W. n = R ist, auch W. a b m = W. c d n seyn. Aber die eben genannten Winkel bestimmen die Neigung der Linien a b und c d gegen die Ebene x y. Folglich sind diese Neigungen einander gleich.

§. 26.

Lehrsatz. Wenn zwey Ebenen, welche sich durchschneiden, einzeln genommen, auf einer dritten Ebene lothrecht sind, so steht auch ihre Durchschnittslinie auf dieser Ebene senkrecht.

Es sey die Ebene a q c (Fig. 6.) und n a g, welche sich in der geraden Linie a q schneiden, auf x y lothrecht, so ist auch a q auf x y senkrecht.

Beweis. Da die Ebene a q c auf x y lothrecht ist, so ist W. a q c = R, und, weil n a g ebenfalls auf x y senkrecht steht, so ist auch W. a q g = R. Folglich bildet a q mit q c und mit q g rechte Winkel und ist somit auf x y lothrecht.

II.

Die Körperwinkel.

§. 27.

Lehrsatz. Zwey ebene Winkel können keinen Körperwinkel bilden.

Es seyen die ebenen Winkel (Fig. 10.) bac und cad gegeben, so können dieselbe keinen körperlichen Winkel bilden.

Beweis. Man denke sich, daß der W. bac dergestalt um den unbeweglichen Schenkel ac gedreht werde, daß sich der Schenkel ab über die Ebene dac erhebe, so ist klar, daß die beyden Winkel-Ebenen sich in ac schneiden werden, aber nach der dieser Linie entgegenstehenden Seite unbegrenzt sind, und somit keine körperliche Ecke bilden können.

§. 28.

Lehrsatz. Drey ebene Winkel können einen Körperwinkel bilden.

Es seyen (Fig. 11.) die Winkel mca, acb und bcn gegeben, so können dieselbe einen Körperwinkel bilden.

Beweis. Man denke sich den W. mca um die Linie ca, den W. ncb aber um die Linie cb der-

gestalt gedreht, daß sich die Linien c m und c n über die Ebene a c b erheben. Hierdurch werden diese Linien c m und c n sich einmal in der gemeinsamen Linie c d vereinigen, und hierdurch bey c einen Körperwinkel bilden, welcher von den Winkeln a c d, b c d und a c b eingeschlossen ist.

§. 29.

Zusatz. Auch kann man sich die Entstehung eines dreykantigen Körperwinkels dadurch erklären, daß man in der Ebene des Dreyecks a b c (Fig. 12.) einen willkührlichen Punkt d annimmt, aus ihm das Loth d g errichtet und die gerade Linie b g zieht. Hier befindet sich am Punkte b ein körperlicher Winkel, welcher von den Winkeln a b g, c b g und a b c umschlossen ist.

§. 30.

Lehrsatz. Im dreykantigen Körperwinkel sind je zwey Seitenwinkel zusammengenommen größer als der dritte.

Es seyen (Fig. 13.) n c a, a c b und b c m die gegebenen Winkel, welche den Körperwinkel bilden sollen, so müßen die zwey kleinern n c a und b c m zusammen größer als der größere Winkel a c b seyn.

Beweis. Wären die Winkel n c a und m c b zusammengenommen nicht größer als a c b, so müßte ihre Summe entweder so groß als a c b, oder kleiner als a c b seyn.

Im ersten Falle denke man sich den W. n c a um c a, den W. m c b um c b bewegt, so werden die Schenkel c n und c m in der Linie c d zusammenfallen, welche sich in der Ebene a c b befindet, und können daher bey c keinen Körperwinkel bilden.

Im zweyten Falle würde zwischen den beyden kleinern Winkeln in der Ebene des größern selbst noch ein Winkelraum bleiben.

§. 31.

Aufgabe. Einen dreykantigen Körperwinkel aus drey gleichen Seitenwinkeln zu construiren.

Auflösung. Man construire (Fig. 14.) das gleichseitige Dreyeck a b c, errichte aus dessen Mitte n auf dasselbe das Loth n d und verbinde den willkührlichen Punkt d mit a, b, c durch die geraden d a, d b, d c, so ist bey d der verlangte Körperwinkel.

Beweis. Wenn man die geraden a n, b n c n zieht, so sind die Dreyecke d n a, d n b und d n c congruent, daher ist d a = d b = d c. Da nun a b = b c = c a, so sind auch die Dreyecke a d b, b d c, und c d a congruent; folglich die drey Winkel bey d einander gleich.

§. 32.

Zusatz. I. Um einen dreykantigen Körperwinkel zu construiren, dessen drey Seitenwinkel rechte sind,

verzeichne man (Fig. 15.) das bey b rechtwinkelige Dreyeck a b c und errichte aus b auf a b c das Loth b d, so entsteht bey d der verlangte Körperwinkel.

II. Sollten die drey Seitenwinkel spitze seyn, so müßte der W. a b c ein spitzer, und die Linie b d gegen a b c unter einem spitzen Winkel geneigt seyn.

III. Wäre der W. a b c ein stumpfer und die Linie b d stumpfwinkelig gegen a b c geneigt, so entstände bey b ein von drey stumpfen Winkeln umschlossener Körperwinkel.

§. 33.

Aufgabe. Einen von vier gleichen Seitenwinkeln begränzten Körperwinkel zu construiren.

Auflösung. Aus der Mitte q (Fig. 16.) des Quadrates b g d c errichte man das unbestimmte Loth q a auf dasselbe und ziehe die geraden a b, a c, a d, a g, so ist bey a der verlangte Körperwinkel.

Beweis. Denn, wenn man die Linien b q, c q, d q, g q zieht, so sind die Dreyecke a q b, a q c, a q d, a q g congruent; folglich auch die Dreyecke b a c, c a d, d a g, g a b, und somit die vier Seitenwinkel bey a einander gleich.

§. 34.

Anmerkung. Die Construction eines vierkantigen Körperwinkels von ungleichen Seitenwinkeln wird der aufmerksame Schüler nunmehr von selbst finden.

Auch wird er die Entstehung des fünfkantigen, und überhaupt des vielkantigen Körperwinkels mit gleichen und ungleichen Seitenwinkeln leicht nachweisen.

§. 35.

Lehrsatz. Bey jedem dreykantigen Körperwinkel beträgt die Summe seiner drey Seitenwinkel weniger als vier rechte Winkel.

Es sey (Fig. 14.) d der gegebene Körperwinkel, so betragen die Winkel a d b, b d c und c d a zusammen weniger als vier rechte.

Beweis. Man nehme an, diese drey Winkel betrügen vier rechte, so müßten, weil in den drey Seitendreyecken d a b, d b c und d c a zusammengenommen sechs rechte sind, die sechs Winkel an den Grundlinien a b, b c und c a zusammen zwey rechte betragen. Da aber die Winkel d a c und d a b zusammen größer als W. c a b; die Winkel d b a und d b c größer als W. a b c, und die Winkel d c b und d c a größer als W. b c a sind; endlich die Winkel c a b, a b c und b c a zusammen nur zwey rechte betragen, so müßten jene sechs Winkel so groß als diese drey Winkel seyn, was (nach dem Vorhergehenden) widersprechend ist. Folglich betragen die drey Winkel an d keine vier rechte. Eben so wenig können diese Winkel mehr als vier rechte betragen.

§. 36.

Zusatz. I. Aus gleichen Gründen betragen die um a (Fig. 16.) liegenden vier Winkel ebenfalls we-

niger als vier rechte. Denn, wenn sie vier rechten gleich wären, so betrügen die an den Grundlinien b c, c d, d g, g b der Dreyecke a b c, a c d, a d g, a g b liegenden acht Winkel ebenfalls vier rechte, welches nicht möglich ist, da ihre Summe größer seyn muß, als die vier Winkel im Vierecke b g d c, welche letztere vier rechte beträgt.

II. Auf gleiche Art wird der Beweis für einen fünf- und mehrkantigen Körperwinkel geführt; so, daß man nun überhaupt erkennt, die Summe aller ebenen Winkel, welche einen Körperwinkel bilden, müsse kleiner als vier rechte seyn.

III. Diese Wahrheit erhellet auch daraus, daß, wenn z. B. die bey a liegenden vier Seitenwinkel vier rechten Winkeln gleich wären, sie alsdann in eine Ebene zusammenfallen müßten, und daher keine körperliche Ecke bilden könnten.

§. 37.

Aufgabe. Den Begriff von dem Decken dreykantiger Körperwinkel zu erläutern.

Auflösung. Es sey (Fig. 17.) W. a b c $\equiv$ W. g h m, man mache b a $\equiv$ h g, b c $\equiv$ h m, ziehe a c und g m, so sind die Dreyecke a b c und g h m congruent. Nimmt man nun in ihren Ebenen die ähnlich liegenden Puncte f und o, errichtet die gleichen Lothe f d, o n und zieht die geraden b d, h n, so entstehen zwey Körperwinkel bey b und h, welche einander vollkommen decken.

Beweis. Aus vorstehender Construction geht einleuchtend hervor, daß, wenn das Dreyeck a b c von dem Dreyecke g h m gedeckt wird, auch h n und b d sich decken werden.

§. 38.

Anmerkung. Wenn die gleichen Winkel a b c und g h m in einerley Ebene liegen, so kann man aus b und h die Linien b d und h n oberhalb dieser Ebene und mit einander parallel ziehen, wodurch die Körperwinkel bey b und h ebenfalls in einander fallen und nur einen einzigen bilden. Auch ist klar, daß die Congruenz der Körperwinkel keine gleiche Größe der homologen Seitenkanten voraussetzt.

§. 39.

Aufgabe. Die Entstehung einer besondern Gattung dreykantiger Körperwinkel, welche man symmetrische nennt, zu erklären.

Auflösung. I. Die congruenten Dreyecke (Fig. 18.) a c b und h m g haben gegen die gerade Linie a h eine solche Richtung, daß die gleichen Linien b c und g m, in Bezug auf das Loth x y, eine entgegenstehende Lage haben, was auch von den gleichen Linien a c und h m gilt. Nun nehme man in a c b den Punkt d und in h m g den ihm ähnlich liegenden Punct o, errichte die gleichen Lothe d f und o n, und ziehe die geraden f c und n m, so entstehen bey c und m zwey Körperwinkel, welche man symmetrische nennt.

II. Obgleich nun jeder dieser zwey Körperwinkel von drey ebenen Winkeln, welche paarweise einander gleich sind, begrenzt wird, und die Neigung der Linien fc und nm gegen bca und gmh die nämliche ist, so können dennoch diese Körperwinkel nicht so in einander gebracht werden, daß sie sich decken.

III. Die Benennung symmetrische Körperwinkel haben sie zuerst von den französischen Geometern erhalten. Ihre Kenntniß ist lehrreich; doch kann die stereometrische Wissenschaftslehre diesen Begriff auch entbehren.

III.

Die Construction der Körper.

§. 40.

Aufgabe. Die Construction des senkrechten dreyeckigen Prisma nachzuweisen.

Auflösung. I. Man construire (Fig. 19.) ein willkührliches Dreyeck a c b und errichte aus a, c, und b auf dessen Ebene die unbestimmten Lothe a d, c h und b g.

II. Man mache a m = c q = b n und verbinde die Punkte m, q und n durch die geraden m q, q n und n m, so ist der Körper m n q a b c ein senkrechtes dreyeckiges Prisma.

Beweis. Da a m, c q und b n auf a c b senkrecht und einander gleich sind, so laufen sie unter sich parallel, und die Vierecke m q c a, q n b c und m n b a müßen Rechtecke seyn, woraus m q = a c, q n = c b und m n = a b folgt. Daher sind auch die Dreyecke m q n und a c b congruent. Da endlich W. a m q = W. a m n = R, so steht a m auch auf der Ebene n m q lothrecht, und die Oberfläche m q n ist mit der Grundfläche a c b gleichlaufend.

Da nun hiedurch alle Eigenschaften des senkrechten dreyeckigen Prisma nachgewiesen sind, so ist die Auflösung gerechtfertigt.

§. 41.

Anmerkung. Wenn man sich das Dreyeck m q n und aus m auf dessen Ebene das Loth m a vorstellt, und nun annimmt, dieses Dreyeck bewege sich mit dem Scheitelpunkte m längs m a in paralleler und nicht hin und herschwankender Richtung von m bis a, so wird durch diese Bewegung der Ebene m q n nach der Tiefe ebenfalls dieses senkrechte Prisma erzeugt.

§. 42.

Aufgabe. Ein schiefes dreyeckiges Prisma zu construiren.

Auflösung. Nachdem man (Fig. 20.) das willkührliche Dreyeck p q r construirt hat, errichte man aus p eine willkührliche Linie p m schief auf dessen Ebene, nehme das beliebige Stück p d, ziehe durch q und r mit p d die Parallelen q t und r n, mache q g = r h = p d und ziehe die geraden d g, g h und h d, so ist d g h r q p das schiefe Prisma.

Beweis. Dieser ist dem vorigen so ähnlich, daß ihn der Schüler leicht selbst auffinden wird.

§. 43.

Anmerkung. Auch das schiefe dreyeckige Prisma kann durch Bewegung des Dreyecks d g h in paralleler, nicht hin und herschwankender Richtung vom Punkte d nach d p hervorgebracht werden, wodurch abermals die Entstehung eines Körpers durch Bewegung einer Fläche nach der Tiefe erläutert wird.

§. 44.

Aufgabe. Ein senkrechtes Parallelopipedum zu construiren.

Auflösung. Es sey (Fig. 21.) a b d c ein schiefes Parallelogramm, so errichte man aus a, b, d und c die unbestimmten Lothe a h, b s, d r und c g auf dessen Ebene, nehme a m = b n = d q = c p und ziehe die geraden m n, n q, q p und p m, so ist m d ein senkrechtes Parallelopipedum.

Beweis. Da c p, d q, b n und a m auf a b d c senkrecht stehen, so sind je zwey dieser Linien gleichlaufend, und es muß, weil sie auch gleich sind, sowohl p q d c als q n b d und n m a b, auch m p c a ein Rechteck seyn. Daher steht die Seitenkante c p auf der Ebene m p q, d q aber auf der Ebene p q n lothrecht und die Linien m p, p q und q n, und daher auch n m liegen in einerley Ebene. Folglich ist die Oberfläche m n q p mit der Grundfläche gleichlaufend und ihr congruent, und der ganze Körper ein senkrechtes Parallelopipedum.

§. 45.

Zusatz. I. Nimmt man ein Rechteck zur Grundfläche und verfährt wie im vorigen §, so entsteht ein Parallelopipedum, welches von sechs Rechtecken eingeschlossen ist.

II. Wäre die Grundfläche ein Quadrat, so entstände ein Parallelopipedum, welches aus vier unter sich congruenten Rechtecken zu Seitenflächen, und von zwey congruenten Quadraten begrenzt wäre.

III. Errichtet man aus den vier Scheitelpuncten eines Quadrates, senkrecht auf dessen Ebene, vier Linien, deren jede der Seite dieses Quadrates gleich ist und verbindet ihre vier Endpunkte durch vier gerade Linien, so entsteht der Würfel, welcher sich als ein durchaus regelmäßiger Körper leicht nachweisen läßt.

§. 46.

Anmerkung. Daß das senkrechte Parallelopipedum auch dadurch die gehörige Bewegung eines Parallelogramms nach der Tiefe entstehen könne, ist nun aus dem Vorigen von selbst einleuchtend.

§. 47.

Aufgabe. Ein schiefes Parallelopipedum zu construiren.

Auflösung. Es sey (Fig. 22.) c d b a ein gegebenes Parallelogramm. Man errichte aus c auf dessen Ebene die Linie c p nach schiefer Richtung, nehme das willkührliche Stück c h, ziehe durch a,

b und d die geraden a m, b n und d g mit c p parallel, mache jede von ihnen der c h gleich, und ziehe die geraden h m, m n, n g und g h, so ist h b das verlangte Parallelopipedum.

Beweis. Die Richtigkeit dieses Verfahrens ergibt sich sehr leicht aus dem Vorhergehenden.

§. 48.

Anmerkung. Auch wird man leicht einsehen, wie das schiefe Parallelopipedum durch die Bewegung des Parallelogrammes h g n m längs der Linie h c entstehen kann. Desgleichen erhellet, daß die Grundfläche dieses Körpers sowohl ein schiefes Parallelogramm, als auch ein Rechteck, oder ein Quadrat seyn könne.

§. 49.

Zusatz. Aus dem Bisherigen ist die Construction der senkrechten und schiefen vielseitigen Prismen leicht nachzuweisen. Wenn man nämlich auf das Trapez (Fig. 23. und 24.) d c b a die Linie a f senkrecht, oder d f schief errichtet, durch die übrigen Winkelpunkte mit ihr gleich große Parallelen zieht, deren Endpunkte mit geraden Linien verbunden werden, so entsteht ein senkrechtes oder ein schiefes viereckiges Prisma. Durch ähnliches Verfahren werden nun alle fünf, sechs, siebeneckige und überhaupt vieleckige, sowohl senkrechte als schiefe, Prismen construirt.

§. 50.

Aufgabe. Den senkrechten Cylinder zu construiren.

Auflösung. I. Es sey (Fig. 25.) aus dem Punkte d mit dem Halbmesser dm ein Kreis beschrieben. Man errichte aus d auf dessen Ebene ein willkührliches Loth dc, lege durch mcn eine Ebene, in welcher man ca = dm macht und am zieht. Dreht sich nun das Rechteck acdm um die unbewegliche Linie cd einmal ganz umher, so beschreibt ca die Oberfläche, am aber die krumme Seitenfläche des senkrechten Cylinders.

Beweis. Die Richtigkeit dieser Auflösung folgt sehr leicht aus den vorhergehenden Sätzen.

II. Auch läßt sich die Entstehung dieses Cylinders durch die Bewegung der Kreisfläche ab längs der Achse cd erkennen.

§. 51.

Aufgabe. Den schiefen Cylinder zu construiren.

Auflösung. Man nehme (Fig. 26.) aus dem Mittelpunkte m der Kreisfläche cd eine schiefstehende Linie mn willkührlich an, und lasse diese Kreisfläche in paralleler Richtung von m nach n sich bewegen, so beschreibt die Peripherie des Kreises um m die krumme Cylinderfläche, der Kreis cd aber seinen körperlichen Inhalt.

§. 52.

Aufgabe. Die senkrechte dreyeckige Pyramide zu construiren.

Auflösung. In der Mitte des gleichseitigen Dreyecks (Fig. 27.) bdc, nämlich in n, errichte man auf dessen Ebene das willkührliche Loth na und ziehe aus a die geraden ab, ac und ad, so ist abcd die senkrechte dreyeckige Pyramide und an ihre Achse.

Beweis. Aus dieser Construction ersieht man leicht, daß die Seitendreyecke abc, acd und adb congruent, auch die Körperwinkel bey b, c und d einander gleich sind, und endlich daß die Seitenflächen gleiche Neigung gegen die Grundfläche haben.

§. 53.

Aufgabe. Die schiefe dreyeckige Pyramide zu construiren.

Auflösung. Man nehme (Fig. 28.) in der Verlängerung des Dreyecks bcd den willkührlichen Punkt f, errichte aus ihm das Loth fa auf diese Ebene von willkührlicher Länge und ziehe die geraden ab, ac und ad, so ist abcd eine schiefe dreyeckige Pyramide.

Beweis. Die Richtigkeit der Auflösung wird man leicht aus dem Vorhergehenden erkennen.

§. 54.

Aufgabe. Eine senkrechte viereckige Pyramide zu construiren.

Auflösung. In der Mitte des Quadrates (Fig. 29.) abdc, oder des Rechtecks (Fig. 30.) abdc errichte man auf dessen Ebene das willkührliche Loth nm und ziehe die geraden ma, mc, md und mb.

Beweis. Die Gleichheit und Aehnlichkeit der vier Seitenflächen in Fig. 29. und der zwey gegenüberstehenden in Fig. 30, die Gleichheit der vier Körperwinkel in jener und der beyden gegenüberstehenden in dieser Figur ergibt sich leicht aus dem Vorhergehenden.

§. 55.

Aufgabe. Die schiefe vierseitige Pyramide zu construiren.

Auflößung. Nachdem man (Fig. 31.) in dem Trapeze a b c d den willkührlichen Punkt n genommen, und aus ihm auf dessen Ebene das Loth n m errichtet hat, ziehe man die geraden m a, m b, m c und m d.

Beweis. Die Ungleichheit der vier Seitendreyecke und der Körperwinkel an der Grundfläche ist leicht zu erkennen.

§. 56.

Anmerkung. Die schiefe viereckige Pyramide (Fig. 31.) könnte auch dadurch erzeugt werden, daß sich die gerade m g um den festen Punkt m und in steter Berührung mit den Linien a b, b c, c d und d a einmal ganz und gar herumbeweget.

§. 57.

Zusatz. Die Construction der vieleckigen, sowohl senkrechten als schiefen Pyramiden, ist nach dem Vorhergehenden nunmehr keiner Schwierigkeit unterworfen, und der Anfänger wird diese Aufgaben durch geringes Nachdenken richtig aufzulösen wissen.

§. 58.

Aufgabe. Den senkrechten Kegel zu construiren.

Auflösung. Man errichte (Fig. 32.) aus dem Mittelpunkte c des mit c b beschriebenen Kreises ein Loth c a, ziehe die gerade a b und lasse das rechtwinkelige Dreyeck a c b sich um die unbewegliche Linie a c einmal ganz und gar herumdrehen, so beschreibt a b die krumme Seitenfläche des senkrechten Kegels, dessen Körperraum von dieser krummen Fläche und von der Kreisfläche b d eingeschlossen wird.

§. 59.

Anmerkung. Dieser Kegel könnte auch dadurch entstehen, daß die unbestimmt gezogene Linie a g sich in steter Berührung um die Peripherie des Kreises b d herumbewegte.

§. 60.

Aufgabe. Den schiefen Kegel zu construiren.

Auflösung. Man errichte aus dem Mittelpunkte c (Fig. 33.) des Kreises b d auf dessen Ebene die schiefstehende Linie c a, ziehe die gerade a b g und lasse dieselbe, in steter Berührung mit der Peripherie der Grundfläche, sich einmal um dieselbe herumbewegen, so beschreibt diese Linie die krumme Kegelfläche, welche mit der Kreisfläche den Körperraum des schiefen Kegels einschliefet.

§. 61.

Aufgabe. Die Kugel zu construiren.

Auflösung. Wenn sich der Halbkreis (Fig. 34.) a m b c a um dessen unbeweglichen Durchmesser a b einmal ganz und gar herumdreht, so beschreibt die halbe Peripherie a m b eine krumme, in sich selbst zurücklaufende Fläche, worin alle Punkte vom Mittelpunkte c gleichen Abstand haben. Diese Fläche ist die Kugelfläche, und der von ihr eingeschlossene Raum der Kugelraum.

Beweis. Diese Entstehung der Kugel gründet sich unmittelbar auf die Klarheit der Anschauung.

§. 62.

Aufgabe. Das Tetraëder zu construiren.

Auflösung. Man theile jede Seite des gleichseitigen Dreyecks a b c (Fig. 35.) in zwey gleiche Theile in den Punkten d, m und n, ziehe die geraden d m, m n und n d, und lasse nun die Dreyecke a d m, b d n und c n m sich dergestalt um ihre Grundlinien d m, d n und m n drehen, daß ihre Spitzen a, b und c sich einmal in einem einzigen Punkte vereinigen, so entsteht der körperliche Raum des Tetraëders.

Beweis. Aus dieser Entstehung ergibt sich, daß der Körper durch vier congruente Oberflächen begrenzt werde, auch daß die Körperwinkel bey d, m, n und an der gemeinsamen Spitze ebenfalls gleich seyen.

§. 63.

Aufgabe. Das Octaëder zu construiren.

Auflösung. Ueber jede der vier Seiten des Quadrates a b d c (Fig. 36.) errichte man ein gleichseitiges Dreyeck, und lasse diese vier Dreyecke sich dergestalt um a b, b d, d c und c a bewegen, daß ihre Spitzen m, n, p und q in einem gemeinsamen Punkte oberhalb der Fläche a b d c zusammentreffen, so entsteht eine senkrechte viereckige Pyramide. Denkt man sich dieselbe noch einmal und setzt beyde mit ihren quadratischen Grundflächen congruent zusammen; so, daß ihre Spitzen nach entgegengesetzten Seiten fallen, so ist das Octaëder gebildet.

Beweis. Die Congruenz der acht Seitendreyecke und die Gleichheit der acht Körperwinkel erkennt man leicht aus der Construction.

§. 64.

Lehrsatz. Es kann nur fünf regelmäßige Körper geben.

Beweis. Da regelmäßige Körper jene sind, welche von congruenten regelmäßigen Figuren unter gleichen Körperwinkeln gebildet werden, so ist das gleichseitige Dreyeck als die einfachste Grenzfläche dieser Körper anzusehen. Da nun der Winkel im gleichseitigen Dreyecke 60 Grade beträgt und zur Bildung eines Körperwinkels wenigstens drey Seitenwinkel gehören, so entsteht der Körperwinkel des Tetraëders aus der Vereinigung von drey Winkeln, deren jeder 60 Grade beträgt.

Der Körperwinkel des Octaëders ist aus vier solcher Winkel gebildet, welche zusammengenommen vier mal sechzig, d. h. 240 Grade betragen.

Aus der Zusammensetzung von fünf solcher Winkel entsteht der Körperwinkel des Icosaëders, dessen fünf Seitenwinkel fünf mal sechzig, d. h. 300 Grade betragen.

Wollte man sechs solcher Winkel zusammenstellen, so würde ihre Summe sechs mal sechzig, d. h. 360 Grade betragen, und somit keinen körperlichen Winkel zu bilden im Stande seyn.

Daher kann man vom Winkel im gleichseitigen Dreyecke nur drey regelmäßige Körper bilden.

Auf das regelmäßige Dreyeck folgt zunächst, als regelmäßiges Viereck, das Quadrat. Drey seiner rechten Winkel zusammengestellt, geben den Körperwinkel des Würfels. Vier derselben aber können keine körperliche Ecke mehr bilden.

Nach dem Vierecke folgt das regelmäßige Fünfeck, dessen Polygonwinkel 108 Grade beträgt. Drey solcher Winkel geben daher 324 Grade, folglich einen Körperwinkel, welchen man an dem Dodecaëder findet.

Da nun vier dieser Winkel mehr als vier rechte betragen, so ist weder von diesen, noch von drey Winkeln des regelmäßigen Sechsecks, welche zusammen 360 Grade betragen, ein Körperwinkel möglich.

Daher sind die fünf regelmäßigen Körper folgende: Das Tetraëder, Octaëder, Icosaëder, der Würfel und das Dodecaëder.

Der
stereometrischen Wissenschaftslehre
zweyter Cursus.

Stereometrische Raumverhältnisse.

Zweyter Cursus.

Stereometrische Raumverhältnisse.

I.

Die prismatischen Körper.

§. 65.

Lehrsatz. Jedes Parallelopipedum kann durch einen Diagonalschnitt in zwey dreyeckige Prismen getheilt werden.

Es sey (Fig. 37.) a q das gegebene Parallelopipedum, so ist a d q n der Diagonalschnitt und die beyden Dreyeckigen Prismen sind a c d n p q und a d b n q m.

Beweis. Vor Allem ist zu zeigen, daß die Linien a d und n q sich in einerley Ebene befinden, wovon die Möglichkeit des Diagonalschnitts abhängt. Diese ergibt sich aber sogleich daraus, daß sowohl a n als d q mit c p gleichlaufend ist. Daher müßen auch a n und d q unter sich gleichlaufend, d. h. in einerley Ebene seyn, in welcher sich auch a d und n q befinden. Folglich ist a d q n ein Parallelogramm, und, weil die Diagonalen a d und n q die Oberfläche und Grundfläche in zwey con-

gruente Dreyecke theilen, so muß jedes der beyden körperlichen Stücke des Parallelopipedums ein dreyeckiges Prisma seyn.

§. 66.

Anmerkung. Da das Parallelopipedum sechs Seitenflächen hat und in jeder der Schnitt nach zwey Diagonalen möglich ist, so könnte derselbe, nach Diesem, zwölffach seyn. Da aber je zwey gegenüberliegende Flächen immer auf gleiche Weise geschnitten werden, so läßt sich jedes Parallelopipedum auf sechsfach verschiedene Weise in zwey dreyeckige Prismen zertheilen.

§. 67.

Lehrsatz. Zwey Parallelopipeden, welche gleiche Grundfläche und senkrechte Höhe haben, sind gleich am körperlichen Inhalte.

Beweis. Da in Hinsicht der Lage der beyden Parallelopipeden eine vierfache Verschiedenheit Statt finden kann, so verdient jeder dieser Fälle eine besondere Betrachtung.

Erste Lage. Es sey (Fig. 38.) über a b d c das erste Parallelopipedum d m und das zweyte d n dergestalt errichtet, daß die Seitenflächen p f d c und f g d c in einerley Ebene liegen, und daß die Diagonalfläche n f c a des ersten zugleich Seitenfläche des zweyten ist. Man soll beweisen, daß beyde Körper gleichen Raum einschliesen.

Betrachtet man die zwey dreyeckigen Prismen c p f a m n und d f g b n q so überzeugt man sich leicht, daß sie vollkommen congruent sind, indem das eine dergestalt in das andere gestellt werden kann, daß beyde nur einen Körper bilden. Wird nun zu jenem Prisma der Körper c f d a n b gesetzt, so entsteht das Parallelopipedum d m; und setzt man zu diesem Prisma den nämlichen Körper, so erhält man das Parallelopipedum c q. Da nun hier Gleiches zu Gleichem gesetzt wurde, so sind auch die Summen, d. h. die Parallelopipeden d m und c q einander gleich.

Zweyte Lage. Ueber der Grundfläche (Fig. 39.) h o q p befinden sich die Parallelopipeden q a und p d dergestalt, daß die Seitenfläche b m p h des zweyten zwischen die Seitenflächen c g q o und a n p h des ersten fällt. Hierdurch entstehen die beyden dreyseitigen Prismen a b m n h p und c d f g o q, deren Congruenz sogleich in die Augen fällt. Setzt man zu jenem Prisma den Körper b c g m h o q p, so entsteht das Parallelopipedum a q; setzt man aber eben diesen Körper zu dem andern dreyeckigen Prisma, so entsteht das Parallelopipedum b q. Da man auch hier Gleiches zu Gleichem gesetzt hat, so müßen die entstehenden Summen ebenfalls gleich seyn.

Dritte Lage. Ueber der Grundfläche a c d b (Fig. 40.) befinden sich die beyden Parallelopipeden d m und b g. Das Unterscheidende dieser Lage ist, daß die Seitenfläche n d des ersten Parallelopipedums

von der Seitenfläche h b des zweyten in der geraden Linie o u geschnitten wird. In dieser Lage erkennt man sogleich die zwey dreyseitigen Prismen s q b h m a und t r d g n c, welche einander vollkommen congruent sind. Auch sieht man, daß das kleine dreyeckige Prisma s r u h n o einen Theil von beyden bildet. Nimmt man es beyderseits weg, so bleiben die Körper u r q b o n m a und t s u d g h o c übrig. Wird nun zu jenem das dreyeckige Prisma d u b c o a gesetzt, so entsteht das Parallelopipedum m d; fügt man es aber dem andern Körper bey, so entsteht das Parallelopipedum b g. Da nun zuerst Gleiches von Gleichem abgezogen, nachher aber Gleiches zu Gleichem addirt worden ist, so sind die beyden Parallelopipeden m d und b g gleich am Inhalte.

Vierte Lage. Ueber der Grundfläche a c g b (Fig. 41.) erblickt man die Parallelopipeden g d und a t, deren Unterscheidendes in der Lage darin besteht, daß keine Seitenfläche des einen in der nämlichen Ebene mit irgend einer Seitenfläche des andern liegt; doch befinden sich die Oberflächen g f und s r in einerley Ebene. Verlängert man nun die Linien d f und t r, so wie auch q h und s v in dieser Ebene, bis sich jene in n, diese in p schneiden, und verlängert die q p nach o, die s p nach m, so entsteht ein Parallelogramm m n o p, welches den Parallelogrammen q f und s r congruent ist. Verbindet man nun die Punkte m, n, o und p mit den Punkten a, c, g und b durch die geraden m a, n c, o g und p b, so entsteht das Parallelo=

pipedum a o, welches sowohl mit b f als mit a t Grundfläche und Höhe gemein hat. Da nun die Seitenfläche a m n c mit a d f c in einerley Ebene liegt, so ist das Parallelopipedum a o dem Parallelopipedum b f gleich. Da ferner die Seitenfläche c r t g mit c n o g in der nämlichen Ebene ist, so haben auch die Parallelopipeden a o und a t gleichen Inhalt. Daher sind auch die anfänglich gegebenen Parallelopipeden b f und a t einander gleich.

Da nun, ausser diesen vier Lagen, keine andere denkbar sind, so ist obiger Lehrsatz, einer der wichtigsten der Stereometrie, in seiner ganzen Allgemeinheit erwiesen.

§. 68.

Lehrsatz. Der Diagonalschnitt theilt das senkrechte Parallelopipedum in zwey congruente Hälften.

Es sey (Fig. 37.) a q ein senkrechtes Parallelopipedum und a d q n dessen Diagonalschnitt, so sind die beyden dreyeckigen Prismen c a d p n q und a d b n q m congruent.

Beweis. Da die Grundfläche p m und die Oberfläche c b durch die Diagonalen n q und a d in congruente Dreyecke getheilt werden, so kann das Prisma a d b n q m dergestalt in das andere gestellt werden, daß das Dreyeck m q n das Dreyeck p n q decket. Da nun auch die Körperwinkel bey q und n so wie jene bey m und p einander decken, so fallen auch die Seitenflächen dieser Prismen in einander und decken

sich ebenfalls. Daher befinden sich beyde Prismen dergestalt in einander, daß sie nur ein einziges bilden. Eben dieses kann bey jedem andern Diagonalschnitte dieses Körpers nachgewiesen werden.

§. 69.

Lehrsatz. Das schiefe Parallelopipedum wird durch die Diagonalebene in zwey dreyeckige Pyramiden getheilt, welche nicht congruent sind.

Es sey (Fig. 42.) a q dieses schiefe Parallelopipedum und a d q n der Diagonalschnitt, so können zwar die beyden dreyeckigen Prismen mit ihren congruenten Grundflächen in einander gestellt werden; die Prismen selbst aber werden wegen der verschiedenen Neigung ihrer Seitenflächen nicht gänzlich in einander fallen. Bey genauerer Betrachtung erkennt man, daß die Körperwinkel bey c und b, bey p und m nur symmetrische, nicht aber gleiche sind. Und dieselbe mit Klarheit anzuschauen, ist den Anfängern zu rathen, ein schiefes Parallelopipedum von irgend einer körperlichen Materie so zu theilen, daß man jedes der beyden dreyeckigen Prismen einzeln betrachten kann.

§. 70.

Lehrsatz. Die beyden dreyeckigen Prismen, welche aus dem Diagonalschnitte des schiefen Parallelopipedum entstehen, sind gleich am körperlichen Inhalte.

Es sey (Fig. 43.) h b das schiefe Parallelopipedum und a d m f dessen Diagonalschnitt, so ist zu be-

weisen, daß die beyden schiefen dreyeckigen Prismen c a d h f m und a d b f m g gleichen Körperraum haben.

Beweis. I. Man nehme in der Seitenkante d m den willkührlichen Punkt q, und durchschneide das schiefe Parallelopipedum durch denselben mit einer Ebene, welche auf dessen vier Seitenflächen lothrecht steht, so ist diese Durchschnittsfläche q p n o ein rechtwinkeliges Parallelogramm und man hat von dem schiefen Parallelopipedum den Körper c a b d p n o q abgeschnitten.

II. Setzt man nun diesen Körper mit seiner Oberfläche c a b d dergestalt an die Grundfläche h f g m, daß beyde Flächen sich decken, so erscheint er in der Lage h f g m t r s v, und es ist klar, daß der Körper p n o q t r s v dem schiefen Parallelopipedum gleich seyn müße.

III. Nun ist aber einleuchtend, daß dieser neu entstandene Körper ein senkrechtes Parallelopipedum t o sey, welches durch die Diagonalfläche n q v r in zwey congruente dreyeckige Prismen getheilt wird.

IV. Da nun das senkrechte dreyeckige Prisma p n q t r v aus den beyden körperlichen Stücken p n q h f m und h f m t r v besteht, das schiefe Prisma c a d h f m aber aus eben diesem Körper p n q h f m und aus dem Körper c a d p n q, welcher dem Körper h f m t r v congruent ist, so muß das senkrechte Prisma p n q t r v dem schiefen Prisma c a d h f m gleich seyn.

V. Da eben Dieses von dem senkrechten Prisma n q o r v s und vom schiefen a d b f m g gilt, so ist die Richtigkeit des Lehrsatzes erwiesen.

§. 71.

Anmerkung. Vorstehender Lehrsatz ist der acht und zwanzigste Satz des eilften Buchs der Elemente des Euclides, und einer der wichtigsten in der Stereometrie. Der Beweis, welchen Euclides gab, ist fehlerhaft. Wer nähere Belehrung darüber verlangt, findet dieselbe in meiner Abhandlung: Der acht und zwanzigste Satz des eilften Buchs der Elemente des Euclides, geprüft und neuerwiesen. Mainz, 1818 bey Kupferberg, 33 S. 4to nebst einer Steintafel.

§. 72.

Lehrsatz. Alle dreyeckige Prismen von gleicher Grundfläche und Höhe sind gleich am körperlichen Inhalte.

Beweis. Da jedes dreyeckige Prisma die Hälfte eines Parallelopipedums ist, welches mit ihm einerley Höhe und eine noch einmal so große Grundfläche hat, so lassen sich die gegebenen dreyeckigen Prismen zu den ihnen angehörigen Parallelopipeden ergänzen. Da nun letztere, weil sie Grundfläche und Höhe gemein haben, einander gleich sind, so müßen es auch die dreyeckigen Prismen, als ihre Hälften, seyn.

Zusatz. Aus dem Vorigen §. 73. ist es leicht, ein dreyeckiges Prisma in ein ihm gleiches Parallelopipedum von gleicher Höhe, oder von der halben Höhe; auch umgekehrt ein gegebenes Parallelopipedum in ein ihm gleiches dreyeckiges Prisma von der doppelten Höhe, oder von der doppelten Grundfläche zu verwandeln; Uibungen, welche man den Anfängern bestens empfiehlt.

§. 74.

Lehrsatz. Zwey senkrechte Parallelopipeden von congruenter Grundfläche verhalten sich nach ihrem Körperinhalte wie ihre Höhen.

Uiber der Grundfläche m g (Fig. 44.) stehen die lothrechten Parallelopipeden g b und g a. Man soll beweisen, daß sie sich wie ihre Höhen m b und m a verhalten.

Beweis. I. Es ist aus der Planimetrie bekannt, daß die Linien m b und m a entweder genau genommen ein gemeinschaftliches Maas haben, oder doch so genau mit einer kleinen Linie gemessen werden können, daß der Fehler kleiner ist, als irgend eine angebbare Größe. Es sey m n dieses gemeinsame Maas. Legt man durch n die Ebene n h parallel mit m g, so entsteht ein kleines Parallelopipedum m h.

II. Wäre nun m n in m b z. B. fünfzehnmal, in m a aber zwanzigmal enthalten; so ist klar, daß man den Körper m h fünfzehnmal in das Parallelo-

pipedum g b, zwanzigmal aber in g a so übereinander stellen könnte, daß im ersten Falle der Körper g b, im andern der Körper g a genau erfüllt würde. Daher müßte sich g b zu g a, wie fünfzehn zu zwanzig, d. h. wie die Linie m b zu m a verhalten. Da dieser Beweis von jedem andern Verhältnisse der Linien m b und m a eben so gilt, so ist der Lehrsatz allgemein bewiesen.

§. 75.

Zusatz. I. Auch ist klar, daß sich zwey schiefe Parallelopipeden von congruenten Grundflächen, wie ihre senkrechte Höhen verhalten, da sich jedes derselben in ein ihm gleiches lothrechtes von der nämlichen Grundfläche verwandeln läßt, für welche nun der vorige Beweis gilt.

II. Desgleichen ist klar, daß die Grundflächen beyder Parallelopipeden nicht congruent, sondern überhaupt nur gleich an Fläche zu seyn brauchen.

§. 76.

Lehrsatz. Zwey senkrechte Parallelopipeden von gleicher Höhe verhalten sich nach ihrem Körperraume wie ihre Grundflächen.

Es seyen (Fig. 45.) g c und g d die beyden Parallelopipeden, welche gleiche Höhe a n, aber verschiedene Grundflächen g v und g w haben. Man soll beweisen, daß sich g c zu g d verhalte, wie die Grundfläche g v zur Grundfläche g w.

Beweis. I. Es sey g f das gemeinsame Maas von g h und g p, so ist das kleine Parallelopipedum g b so oft in g c enthalten, wie oft seine Grundfläche g u m f in der Grundfläche g n v h enthalten ist. Aber die kleinere Fläche ist so oft in der größern enthalten, wie oft g f in g h enthalten ist. Desgleichen ist der Körper g b so oft in g d enthalten, wie oft die Fläche g n m f in der Fläche g n w p enthalten ist. Daher muß sich das Parallelopipedum g c zu dem andern g d verhalten, wie g v zu g w.

II. Dasselbe Verhältniß hat auch Statt, wenn von den beyden Parallelopipeden das eine senkrecht, und das andere schief wäre, oder wenn beyde Körper schiefe wären; in beyden Fällen aber immer die Höhe gemein hätten.

§. 77.

Zusatz. Hieraus folgt im Allgemeinen, daß sich alle Parallelopipeden bey gleichen Grundflächen wie ihre senkrechte Höhen; bey gleichen Höhen aber wie ihre Grundflächen verhalten.

§. 78.

Lehrsatz. Parallelopipeden von verschiedener Grundfläche und Höhe stehen im zusammengesetzten Verhältnisse dieser Grundflächen und Höhen.

Es sey das erste Parallelopipedum A, seine Grundfläche G, seine Höhe H; das zweyte B habe

zur Grundfläche g, zur Höhe h, so soll bewiesen werden, daß A: B = G × H: g × h.

Beweis. Man denke sich ein drittes Parallelopipedum C, welches G zur Grundfläche und h zur Höhe hat, so ist nach dem Vorigen

A: C = H: h, und dann auch
C: B = G: g, folglich ist

A: B = H × G: h × g, wobey man bemerkt, daß das Product H × G und h × g ein Factum aus dem in Zahlen ausgedrückten Maase der Höhen in die durch Zahlen bestimmten Grundflächen bedeutet. Wie man diese Maase findet, hat bereits die Planimetrie gelehrt. Auch handelt der dritte Cursus dieser Schrift davon.

§. 79.

Zusatz. I. Daher sind zwey Parallelopipeden gleich am Inhalte, wenn die Producte aus den in Zahlen ausgedrückten Grundflächen und Höhen derselben einerley sind; d. h. Grundfläche und Höhe sind die beyden Elemente, wovon der Körperraum der Parallelopipeden abhängt.

II. Wenn H × G = h × g ist, und folglich beyde Parallelopipeden gleich sind, so folgt H: h = g: G. d. h. wenn zwey Parallelopipeden von verschiedener Grundfläche und Höhe gleichen Inhalt haben, so verhalten sich ihre Höhen umgekehrt wie ihre Grundflächen, und ihre Grundflächen verkehrt wie die Höhen. Deßgleichen müßen auch diese Körper einerley Raum erfüllen, wenn jene Verhältnisse Statt finden.

III. Hierauf beruht die Möglichkeit, ein gegebenes Parallelopipedum in andere zu verwandeln, welche verschiedene Grundfläche und Höhe mit ihm, aber dennoch den nämlichen Inhalt haben.

§. 80.

Zusatz. I. Alle dreyeckige Prismen verhalten sich, bey gleichen Grundflächen, wie ihre Höhen; und bey einerley Höhen wie ihre Grundflächen. Denn sie sind die Hälften von den ihnen zugehörigen Parallelopipeden.

II. Dreyeckige Prismen von verschiedenen Grundflächen und Höhen stehen im zusammengesetzten Verhältnisse dieser Grundflächen und Höhen.

III. Wenn sich die Grundflächen zweyer dreyeckigen Prismen verkehrt wie ihre Höhen verhalten, so sind diese Körper gleich am Inhalte.

§. 81.

Lehrsatz. Alle vielkantige Prismen lassen sich in so viele dreyeckige theilen, als ihre Grundflächen Seiten haben, weniger zwey.

Das fünfkantige Prisma (Fig. 46.) läßt sich in drey dreyeckige Pyramiden zertheilen.

Beweis. Da die Kanten ma und pd mit qg parallel sind, so liegen sie in einerley Ebene, und durch den Schnitt mpda entsteht das dreyseitige Prisma mqpagd. Der Schnitt durch moca gibt das dreyeckige Prisma ompcad und das, was nun übrig bleibt, ist das dreyeckige Prisma mnoabc.

Da aus der Planimetrie bekannt ist, daß jedes geradlinige Vieleck durch Diagonalen in so viele Dreyecke zerlegt werden kann, als dasselbe Seiten hat, weniger zwey: so ist die Allgemeinheit des Lehrsatzes hierdurch erwiesen.

§. 82.

Anmerkung. Es ist eine nützliche Uibung für Anfänger, irgend ein vieleckiges Prisma durch Diagonalflächen so zu theilen, daß nach und nach alle mögliche dreyeckige Prismen zur Anschauung kommen.

§. 83.

Lehrsatz. Alle vielkantige Prismen von gleich vielen Kanten, von congruenter Grundfläche und gleicher Höhe sind gleich am Inhalte.

Beweis. Wenn beyde Körper durch Diagonalflächen in dreyeckige Prismen zertheilt werden, so erhält man in beyden gleichviele derselben. Da aber jedes von ihnen, mit dem ihm entsprechenden, Grundfläche und Höhe gemein hat, so sind diese gleich am Inhalte. Daher sind auch ihre Summen, d. h. die vielkantigen Prismen einander gleich.

§. 84.

Zusatz. I. Alle vielkantige Prismen von gleicher Seitenzahl stehen im zusammengesetzten Verhältnisse ihrer Grundflächen und Höhen; sie verhalten sich bey gleichen Grundflächen, wie die Höhen, und umgekehrt.

II. Auch ungleichvielkantige Prismen von einerley Grundfläche und Höhe sind gleich am Inhalte. Denn alle dreyeckige Prismen des einen Körpers geben, doppelt genommen, ein Parallelopipedum, welches jenem aus dem doppelten aller dreyeckigen Prismen des andern gleich ist.

III. Aus dem Vorhergehenden ist nunmehr der wichtige Satz bewiesen:

Alle eckige prismatische Körper stehen im zusammengesetzten Verhältnisse ihrer Grundflächen und senkrechten Höhen, und sind daher einander gleich, wenn sich ihre Grundflächen verkehrt wie die Höhen, oder die Höhen verkehrt wie die Grundflächen verhalten.

Auf der Anwendung dieses Satzes beruhet die Verwandlung eines gegebenen prismatischen Körpers in andere, welche durch die Zahl ihrer Seitenkanten und deren Richtung gegen die Grundflächen unterschieden sind.

§. 85.

Lehrsatz. Alle Cylinder von gleicher Grundfläche und Höhe haben einerley Körperinhalt.

Beweis. Die Grundflächen der Cylinder sind Kreise. Kreise aber können als regelmäßige Vielecke von sehr vielen Seiten angesehen werden. Daher kann man jeden Cylinder als einen prismatischen Körper von sehr vielen Seitenkanten betrachten. Da

nun alle prismatische Körper von einerley Grundfläche und Höhe einander gleich sind, so muß eben dieses auch von den Cylindern gelten.

§. 86.

Zusatz. I. Cylinder von gleichen Grundflächen verhalten sich daher wie ihre Höhen, und umgekehrt.

II. Cylinder von verschiedenen Grundflächen und ungleichen Höhen stehen im zusammengesetzten Verhältnisse aus diesen Grundflächen und Höhen.

III. Wenn daher zwey Cylinder von verschiedenen Grundflächen und Höhen gleichen Inhalt haben, so stehen ihre Grundflächen im verkehrten Verhältnisse der Höhen, und umgekehrt.

IV. Zwey Cylinder von gleicher Höhe und verschiedenen Grundflächen werden daher in einen von gleicher Höhe verwandelt, wenn man die Kreise ihrer Grundflächen (durch Hülfe des pythagoräischen Lehrsatzes) in einen Kreis verwandelt und darüber einen (senkrechten oder schiefen) Cylinder von der nämlichen Höhe construirt.

V. Auf gleiche Weise lassen sich auch mehrere Cylinder von einerley Höhe in einen einzigen von der nämlichen Höhe verwandeln.

VI. Auch ist es leicht, mehrere Cylinder von gleicher Grundfläche, aber verschiedener Höhe, in einen einzigen, der allen gleich ist, umzuwandeln.

VII. Ferner läßt sich die Differenz zweyer Cylinder von gleichen Höhen und verschiedenen Grund-

flächen durch einen Cylinder von der nämlichen Höhe darstellen, so wie auch die Differenz zweyer Cylinder von gleicher Grundfläche und verschiedener Höhe durch einen Cylinder ausgedrückt werden kann.

VIII. Desgleichen läßt sich ein gegebener Cylinder in andere ihm gleiche verwandeln, welche mit ihm verschiedene Grundflächen und Höhen haben. Macht man z. B. die Grundfläche des neuen Cylinders noch einmal so groß, als jene des gegebenen ist, so darf seine Höhe nur halb so groß werden, u. s. w.

§. 87.

Zusatz. Aus dem Bisherigen ist nunmehr folgender Satz erwiesen:

Alle prismatische (eckige und cylindrische) Körper stehen im zusammengesetzten Verhältnisse ihrer Grundflächen und senkrechten Höhen.

§. 88.

Zusatz. Auch kann man nunmehr die eckigen prismatischen Körper leicht in cylindrische, welche ihnen gleich sind, und umgekehrt, verwandeln.

Die hieher gehörigen Fälle aufzufinden und aufzulösen, ist eine empfehlenswerthe Uibung für Anfänger.

II.

Die pyramidalischen Körper und die Kugel.

§. 89.

Lehrsatz. Dreyeckige Pyramiden von gleicher Grundfläche und Höhe sind gleich am körperlichen Inhalte.

Es seyen (Fig. 47.) a b c d und m n g f zwey dreyeckige Pyramiden, welche gleiche (nicht congruente) Grundflächen und einerley Höhe haben, so haben beyde gleichen Körperraum.

Beweis. Man nehme an, daß sich die Grundflächen b c d und n g f in einerley Ebene befinden und schneide von beyden Pyramiden, parallel mit den Grundflächen und sehr nahe bey ihnen, die körperlichen Stückchen b c d o v w und n g f h u p davon ab, so stellen diese Stückchen, ohne bedeutenden Fehler, zwey dreyeckige Prismen von gleichen Grundflächen und von einerley (sehr kleinen) Höhe dar, welche deshalb gleich am Inhalte sind. Werden nun beyde Pyramiden, durch fortgesetzte Parallel-Schnitte gegen die Spitzen hin, in eine große Menge solcher Prismen von gleicher Höhe getheilt, so ist klar, daß beyde aus gleich vielen und aus gleich großen Stücken dieser Art bestehen werden. Daher

ist ihre beyderseitige Summe gleich, d. h. die Pyramide a b c d ist der Pyramide m n g f gleich.

§. 90.

Lehrsatz. Jede dreyeckige Pyramide ist der dritte Theil eines dreyeckigen Prisma, welches mit ihr einerley Grundfläche und Höhe hat.

Beweis. I. Es sey (Fig. 48.) c d g h die gegebene dreyeckige Pyramide, so lege man durch die Spitze c eine Ebene v c w parallel mit der Grundfläche, ziehe d a parallel mit g c, auch h b mit g c gleichlaufend, und verbinde a und b durch die gerade a b, so stellt a c b d g h ein dreyeckiges Prisma vor, welches mit der Pyramide c d g h gleiche Grundfläche und Höhe hat.

II. Nimmt man von diesem Prisma die Pyramide c d g h hinweg, so bleibt eine viereckige Pyramide übrig, deren Grundfläche a b h d und deren Spitze der Punkt c ist. Schneidet man diese Pyramide durch die Ebene d c b in zwey Theile, so entstehen die beyden dreyseitigen Pyramiden d a b c und d h b c, welche, da sie Grundfläche und Höhe gemein haben, gleich am Inhalte sind.

III. Man erkennt aber auch, daß man von der Pyramide d a b c das Dreyeck a c b als Grundfläche, und d als Spitze annehmen kann; und nun hat sie mit der gegebenen Pyramide c d g h Grundfläche und Höhe, folglich auch den Inhalt gemein.

IV. Da nun Pyramide a b c d der Pyramide d h b c, Pyramide a b c d aber auch der Pyramide c d g h gleich ist, so sind diese drey Pyramiden unter sich gleich und jede ist ein Drittheil des dreyeckigen Prisma a c b d g h.

§. 91.

Zusatz. I. Alle dreyeckige Pyramiden verhalten sich demnach wie die Producte aus dem Maaße ihrer Grundflächen in jenes ihrer senkrechten Höhen. Denn was von den dreyeckigen Prismen, als den Ganzen, bewiesen ist, muß auch von ihren Drittheilen, d. h. von den dreyeckigen Pyramiden gelten.

II. Pyramiden von gleicher Höhe verhalten sich daher wie ihre Grundflächen, und umgekehrt. Auch stehen, bey gleichen Pyramiden von ungleichen Grundflächen und Höhen, die Grundflächen im verkehrten Verhältnisse der Höhen, und umgekehrt.

§. 92.

Lehrsatz. Alle vieleckige Pyramiden lassen sich in so viele dreyeckige theilen, als ihre Grundflächen Seiten haben, weniger zwey.

Beweis. Da die Grundfläche dieser Pyramiden ein Vieleck ist, so kann dasselbe durch Diagonalen in so viele Dreyecke zerlegt werden, als dieselbe Seiten hat, weniger zwey. Denkt man sich nun durch die Endpunkte jeder dieser Diagonalen und durch die Spitze der Pyramide eine Ebene gelegt, so müßen in

der vieleckigen Pyramide so viele dreyeckige Pyramiden entstehen, als Dreyecke in ihrer Grundfläche möglich sind; d. h. zwey weniger, als wie viele Seiten sie hat.

Der Anfänger wird wohl thun, die Behauptung dieses Lehrsatzes sich durch wirkliche Zeichnungen zu versinnlichen.

§. 93.

Zusatz. I. Nun ist auch klar, daß alle vielkantige Pyramiden im zusammengesetzten Verhältnisse ihrer Grundflächen und Höhen stehen, da ihre Theile (die dreyeckigen Pyramiden) in diesem Verhältnisse sind.

II. Auch verhalten sich alle Pyramiden von gleicher Grundfläche wie ihre Höhen, und umgekehrt.

III. Ferner stehen bey gleichen, an Seitenzahl verschiedenen Pyramiden die Grundflächen im umgekehrten Verhältnisse der Höhen, und die Höhen im verkehrten Verhältnisse der Grundflächen.

IV. Ueberhaupt liefern die seitherigen Sätze vielfachen Stoff zur Verwandlung der (eckigen und cylindrischen) prismatischen Körper in pyramidalische, welche ihnen gleich sind, und umgekehrt. Solche Uebungen sind den Anfängern dieses Studiums zu empfehlen.

§. 94.

Lehrsatz. Der Kegel ist ein Drittheil eines Cylinders, welcher mit ihm einerley Grundfläche und Höhe hat.

Beweis. Nach dem Vorhergehenden ist klar, daß der Kegel einer Pyramide von unzählig vielen Seiten, der Cylinder aber einem Prisma von sehr vielen Seiten gleich ist. Da nun jede Pyramide der dritte Theil eines Prisma ist, welches mit ihr Grundfläche und Höhe gemein hat, so muß eben dieses Verhältniß auch für den Kegel und zugehörigen Cylinder gelten.

§. 95.

Zusatz. Alle Raumverhältnisse, welche von Pyramiden erwiesen worden sind, gelten daher auch von den Kegeln. Es verhalten sich nämlich diese Körper wie die Producte aus ihren Grundflächen in ihre senkrechte Höhen. Haben sie die Grundfläche gemein, so stehen ihre Körperräume im Verhältnisse ihrer Höhen, und umgekehrt. Endlich haben alle Kegel, bey welchen sich die Grundflächen umgekehrt wie die Höhen verhalten, einerley Inhalt.

§. 96.

Zusatz. I. Auch ist es nunmehr leicht, zwey oder mehrere Kegel von einerley Höhe, durch geometrische Construction, in einen einzigen von gleicher Höhe zu verwandeln.

II. Ferner läßt sich die Differenz zweyer Kegel von gleicher Höhe auf diese Weise durch einen Kegel von derselbigen Höhe darstellen.

III. Eben so kann man einen oder mehrere Kegel in einen ihnen gleichen Cylinder verwandeln, oder umgekehrt.

§. 97.

Zusatz. Als allgemeines Resultat aus dem Bisherigen geht nunmehr der sehr wichtige Satz hervor:

Alle prismatische und pyramidalische Körper stehen nach ihrem Körperinhalte im zusammengesetzten Verhältnisse ihrer Grundflächen und senkrechten Höhen.

Die Grundflächen und die senkrechten Höhen sind daher die Elemente, wovon der körperliche Raum aller eckigen und runden, prismatischen und pyramidalischen Körper abhängt. Da nun die Grundflächen dieser Körper, wie aus der Planimetrie bekannt ist, von Grundlinie und senkrechter Höhe, oder allgemein von Länge und Breite abhängen: so folgt, daß der körperliche Raum oben genannter Körper durch die auf einander lothrecht stehenden Dimensionen der Länge, Breite, und Tiefe bestimmt werde. Wie dieses mit dem wirklichen Ausmessen der Körper zusammenhänge, wird der nächste Cursus lehren.

§. 98.

Lehrsatz. Wenn irgend ein Kegel durch eine Ebene, parallel mit der

Grundfläche, geschnitten wird, so ist die Durchschnittsfläche ein Kreis.

Es sey (Fig. 49.) aqm der gegebene Kegel und bdgn die Ebene, welche ihn mit der Grundfläche gleichlaufend schneidet, so ist bdgn ein Kreis.

Beweis. Man nehme in der Grundfläche einen beliebigen Durchmesser hop, lege durch die Punkte a, h und p eine Ebene hap, so wird diese ein Achsendreyeck des Kegels seyn. Auch schneidet sie die Ebene bg in der geraden Linie dn, welche mit hp parallel ist. Folglich sind die Dreyecke acn und aop, so wie auch acd und aoh, einander ähnlich. Daher verhält sich ao: ac = op: cn; eben so auch ao: ac = oh: cd. Folglich ist auch op: cn = oh: cd. Da nun op = oh, so ist auch cn = cd. Weil dies aber bey jedem andern Durchschnitte des Achsendreyecks und der Parallelebene auf gleiche Art Statt hat, so ist die Ebene bdgn ein Kreis.

§. 99.

Zusatz. Da sich op: cn = ao: ac verhält, so muß cn um so kleiner werden, je kleiner ac gegen ao ist; d. h. die Durchschnittskreise im Kegel müßen immer kleiner werden, je näher die Durchschnittsebene gegen die Spitze rückt; um so größer aber, je weiter sie sich von der Spitze entfernt.

§. 100.

Lehrsatz. Wenn irgend ein Cylinder parallel mit der Grundfläche durchschnitten wird, so bildet die Durchschnittsfigur einen Kreis.

Es sey (Fig. 50.) abhg der senkrechte Cylinder, welcher von der Ebene vw parallel mit gh und ab geschnitten wird, so ist vrwq ein Kreis.

Beweis. Man nehme in der Oberfläche einen willkührlichen Durchmesser mn, lege durch die Punkte m, n und d eine Ebene, welche den Cylinder in zwey Stücke theilt, so entsteht als Durchschnittsebene das Rechteck mnpo, welches die Ebene vw in der Linie rq schneidet. Da nun rq mit op gleichlaufend, auch qp mit ro parallel ist, so muß rq = op seyn. Auch wird, weil sd sowohl mit ro als mit qp parallel ist, sr = sq, folglich die Ebene vrwq eine Kreisfläche seyn.

§. 101.

Anmerkung. Wenn ein Kegel oder ein Cylinder nicht parallel, sondern schief mit der Grundfläche geschnitten wird, so ist die Durchschnittsfigur kein Kreis, sondern eine merkwürdige Figur, welche Ellipse heißt, und deren Eigenschaften in der höhern Geometrie betrachtet werden.

§. 102.

Lehrsatz. Wenn die Kugel mit einer Ebene durchschnitten wird, so entsteht als Durchschnittsfläche ein Kreis.

Es stelle (Fig. 51.) apbq die Kugel, und ab die Richtung des Durchschnitts der Ebene vor, so ist ahbnm ein Kreis.

Beweis. I. Wenn man vom Mittelpunkte der Kugel das Loth cd auf die schneidende Ebene, und von d in letzterer zwey willkührliche Linien dn und dm bis zur Grenze der Kugelfläche zieht, so kann bewiesen werden, daß jedesmal dm = dn sey.

II. Denn wenn man die Kugelhalbmesser cm und cn zieht, so entstehen zwey rechtwinkelige Dreyecke cdm und cdn, worinn die Hypotenuse cm und cn, so wie auch die Catheten cd beyderseits gemeinschaftlich ist. Daher muß auch die Cathete dm der Cathete dn gleich, folglich auch die Durchschnittsfigur ein Kreis seyn.

§. 103.

Zusatz. Da das Quadrat von dm der Differenz aus den Quadraten von cm und von cd gleich ist, so muß das Quadrat von dm kleiner werden, je größer cd ist; aber größer, je kleiner cd genommen wird. Hieraus ist klar, daß die Durchschnittskreise immer kleiner werden, je entfernter die Durchschnittsebene vom Mittelpunkte liegt; so, daß wenn sie in q läge, kein Kreis Statt fände. Umgekehrt müßen die Durchschnittskreise größer werden, je näher die schneidende Ebene den Mittelpunkte kömmt; so, daß wenn sie selbst durch den Mittelpunkt geht, der Durchschnittskreis der größte wird, welcher in der Kugel möglich ist. Der Durchschnitt ist alsdann

der größte Kreis der Kugel, aus dessen Umdrehung um den unbeweglichen Durchmesser der Kugelraum entstanden ist.

§. 104.

Zusatz. I. Wenn man das Loth c d über c und d verlängert, bis dasselbe in p und in q die Kugelfläche schneidet, und nun die geraden p a, p m, q a, q m zieht, so ist in den Dreyecken p d a und p d m die Seite p d = p d, d a = d m, folglich, weil W. p d a = W. p d m = R, das Dreyeck p d a dem Dreyecke p d m congruent, woraus p a = p m folget. Daher sind alle gerade Linien, welche aus dem Punkte p nach irgend einem Punkte in der Peripherie des Durchschnittskreises a h b n m gezogen werden, einander gleich.

II. Auf gleiche Weise erhellet, daß auch die rechtwinkeligen Dreyecke q d a und q d m, weil sie q d nebst d a und d m gemein haben, congruent seyn müßen, woraus die Gleichheit der Linien q a und q m hervorgeht. Daher ist auch der Punkt q von allen in a h b n m willkührlich anzunehmenden Punkten gleich weit entfernt. Man nennt diese Punkte p und q die Pole der Kugel und ihre Eigenschaft ist, daß sie von allen Punkten, welche man in der Peripherie der Kreise, welche aus Durchschnitten der Kugel, parallel mit a b entstehen, annehmen mag, gleiche Entfernung haben.

§. 105.

Lehrsatz. Die Halbkugel ist zwey Drittheile des senkrechten Cylinders, dessen Grundfläche ihr größter Kreis und dessen Höhe ihr Halbmesser ist.

Vorbereitung zum Beweise.

Es sey (Fig. 52.) m c b g ein Quadrat, c m o b ein Quadrant und c m g ein rechtwinkeliges gleichschenkeliges Dreyeck. Wenn sich jede dieser drey Figuren um die gemeinschaftliche Linie m c, als unbewegliche Achse, einmal ganz und gar herumbewegt, so beschreibt das Quadrat c m g b einen senkrechten Cylinder, der Quadrant c m o b eine Halbkugel und das rechtwinkelige Dreyeck c m g einen senkrechten Kegel. Auch sieht man sogleich, daß sowohl die Grundfläche des Cylinders, als auch des Kegels der größte Kreis der Halbkugel, ihre gemeinsame Höhe aber ihr Halbmesser c m sey.

Beweis. I. Man schneide die drey genannten Körper durch eine Ebene n f, welche mit c b gleichlaufend ist, so entstehen drey Kreise als Durchschnittsflächen des Cylinders, der Halbkugel und des Kegels, deren Halbmesser die Linien n f, n o und n h sind, und es ist bekannt, daß sich ihre Flächen wie die Quadrate der eben genannten Halbmesser verhalten.

II. Zieht man die gerade c o, so ist das Quadrat von c o dem Quadrate von c n nebst dem

Quadrate von n o gleich. Da aber c o = c b = n f, c n aber (wegen c m = m g) = n h ist, so ist auch das Quadrat von n f dem Quadrate von n o nebst dem Quadrate von n h gleich; d. h. die Kreisfläche, welche aus dem Durchschnitte des Cylinders entsteht, ist so groß, als die beyden andern ihr entsprechenden Kreisflächen, welche der Durchschnitt der Halbkugel und des Kegels erzeugt.

III. Denkt man sich nun, parallel mit der Durchschnittsebene n f, eine zweyte in sehr großer Nähe bey ihr, so entstehen hierdurch drey Cylinder von gleicher Höhe, welche sich demnach wie ihre Grundflächen verhalten. Da diese aber die Kreise mit n f, n o und n h sind, so ist der Körperinhalt des Cylinders über n f so groß, als die beyden Cylinder über n o und n h zusammengenommen. Da aber dieses Verhältniß der drey Cylinder auch bey jedem andern Durchschnitte Statt findet, und, wegen der gleichen Höhe c m, aus dem senkrechten Cylinder, aus der Halbkugel und aus dem Kegel auch gleich viele solcher Durchschnitts-Cylinder möglich sind, so muß die Summe aller Durchschnitts-Cylinder im großen Cylinder gleich seyn der Summe aus allen Durchschnitts-Cylindern in der Halbkugel nebst allen diesen Cylindern in dem Kegel; d. h. der ganze Cylinder ist der ganzen Halbkugel nebst dem ganzen Kegel gleich.

IV. Da nun der Kegel ein Drittheil des ihm zugehörigen Cylinders ist, so muß die Halbkugel zwey Drittheile dieses Cylinders seyn.

§. 106.

Zusatz. Daher beträgt auch die ganze Kugel zwey Drittheile eines Cylinders, dessen Grundfläche der größte Kreis der Kugel und dessen Höhe ihr Durchmesser ist.

§. 107.

Zusatz. Die Kugelräume stehen daher auch im zusammengesetzten Verhältnisse ihrer größten Kreise und Durchmesser.

III.

Die Aehnlichkeit der Körper.

§. 108.

Aufgabe. Die Entstehung ähnlicher dreyeckiger Pyramiden nachzuweisen.

Auflösung. I. Es sey (Fig. 53.) amng eine dreyeckige Pyramide. Man nehme in der Seitenkante am den willkührlichen Punkt b und lege durch ihn eine Ebene parallel mit der Grundfläche, welche die Pyramide nach dem Dreyecke bcd schneidet.

II. Dieses Dreyeck bcd ist der Grundfläche mng ähnlich. Denn da die Durchschnittsebene parallel mit der Grundfläche ist, so müßen auch die Durchschnittslinien bc, cd und db mit mn, ng und gm gleichlaufend seyn. Daher ist der W. dbc = W. gmn, W. bdc = W. mgn und auch W. bcd = W. mng, woraus die Aehnlichkeit beyder Dreyecke hervorgeht.

III. Ferner ist klar, daß der Körperwinkel bey b jenen bey m; der bey c jenen bey n, und der bey d jenen bey g vollkommen decket, so wie die kleine Pyramide abcd den Körperwinkel a mit der großen amng gemein hat. Desgleichen erhellet, daß die Seitenflächen abc, acd und adb den Seitenflächen amn, ang und agm ähnlich, so wie auch, daß die Neigungswinkel dieser Sei-

tenflächen gegen die Grundflächen durchaus die nämlichen sind.

IV. Aus Diesem geht die Folge hervor, daß die kleine Pyramide in Allem mit der großen übereinstimme, und nur in der Größe von ihr verschieden sey. Daher nennt man die Pyramide a b c d in Bezug auf a m n g eine ihr ähnliche und die in der Anschauungslehre gegebene Erklärung von ähnlichen dreyeckigen Pyramiden ist hierdurch zur Sacherklärung geworden.

§. 109.

Zusatz. Auf ähnliche Weise läßt sich die Entstehung von ähnlichen vielseitigen Pyramiden nachweisen. Wenn nämlich irgend eine vieleckige Pyramide von einer Ebene, parallel mit der Grundfläche, geschnitten wird, so entsteht ebenfalls eine kleinere Pyramide, welche der größern ähnlich ist. Die Aehnlichkeit der Pyramiden überhaupt besteht daher in einer vollkommenen Gleichheit aller homologen Körperwinkel, in der Aehnlichkeit aller homologen Seitenflächen, in der Proportionalität aller homologen Seitenkanten und endlich in der Gleichheit der Neigungen homologer Seitenflächen gegen die Grundfläche.

§. 110.

Lehrsatz. Aehnliche dreyeckige Pyramiden verhalten sich wie die Würfel ihrer ähnlich liegenden Seiten.

Es seyen (Fig. 53.) a b c d und a m n g zwey ähnliche Pyramiden, so ist zu beweisen, daß sich

dieselbe wie die Würfel verhalten, welche mit zwey homologen Seiten z. B. mit ab und am construirt werden können.

Beweis. I. Wenn ao die senkrechte Höhe der Pyramide $abcd$ ist, so muß die verlängerte ao, oder au, die Höhe der größern seyn, da die rechtwinkeligen Dreyecke aob und aum ähnlich seyn müßen.

II. Benennt man die kleine Pyramide mit p, die größere mit P, die Grundfläche bcd mit g, mng aber mit G, die Höhe ao mit h, und au mit H, so verhält sich $p : P = g \times h : G \times H$. Da aber g und G ähnliche Dreyecke sind, so verhält sich auch $g : G = bc^q : mn^q = bo^q : mu^q = ao^q : au^q$. Daher ist nun $p : P = ao^q \times ao : au^q \times au$, d. h. $p : P = ao^3 : au^3$. Da nun ao^3 und au^3 die Würfel über ao und au bedeuten, so verhalten sich beyde Pyramiden wie die Würfel dieser Linien, oder auch wie die Würfel von ab und am, weil $ao : au = ab : am$ ist.

III. Den genauen Zusammenhang der Ausdrücke ao^3 und au^3 mit den Würfeln, deren Seiten die Linien ao und au sind, wird der dritte Cursus bestimmter nachweisen.

§. 111.

Zusatz. Wäre daher $ab = 1/3\ am$, so müßte die Pyramide $abcd$ der neunte Theil der Pyramide $amng$ seyn, u. s. w.

§. 112.

Zusatz. Da sich alle vielseitige Pyramiden, welche einander ähnlich sind, in ähnliche dreyeckige zertheilen lassen, so verhalten sich ähnliche Pyramiden überhaupt wie die Würfel ihrer homologen Seiten.

§. 113.

Aufgabe. Eine Pyramide zu construiren, welche einer gegebenen ähnlich ist.

Auflösung. I. Soll die zu findende kleiner als die gegebene seyn, so schneide man letztere zwischen der Spitze und Grundfläche mit einer Ebene, welche der Grundfläche parallel ist.

II. Verlangte man aber eine größere als die gegebene ist, so verlängere man sämmtliche Seitenkanten der letztern unterhalb der Grundfläche nach Belieben, und lege durch sie eine Ebene mit der Grundfläche gleichlaufend.

Beweis. Die Richtigkeit der Auflösung beruht unmittelbar auf dem Vorigen.

§. 114.

Aufgabe. Die Entstehung ähnlicher dreyeckiger Prismen zu erklären.

Auflösung. Es sey (Fig. 54.) abcnop ein gegebenes dreyseitiges Prisma. Man nehme ad und af mit ac und ab proportional, ziehe df, mache $ag : an = ad : ac = af : ab$, ziehe gh mit ac, gm mit ab gleichlaufend, mache $gh = ad$ und $gm = af$ und ziehe endlich hm, dh und

f m, so ist das kleine Prisma a f d g m h dem größern ähnlich.

Beweis. Aus der Construction ist klar, daß das Dreyeck a f d, so wie auch das ihm congruente Dreyeck g m h, sowohl der Oberfläche a b c, als auch der Grundfläche n o p ähnlich sey. Eben so sind a g m f und a n o b, ferner f m h d und b o p c endlich a d h g und a c p n einander ähnlich. Auch sind die Körperwinkel bey d und c, bey h und p, bey f und b, bey m und o, bey g und n einander vollkommen gleich, so wie der Körperwinkel a beyden Prismen gemein ist. Ferner sind die sämmtlichen homologen Seitenkanten einander proportional und die homologen Seitenflächen bilden mit den Grund- und Oberflächen gleiche Neigungswinkel. Daher ist das kleinere Prisma von dem größern nur der Größe nach verschieden, in allem Andern aber, d. h. seiner Gestalt nach, vollkommen übereinstimmend.

§. 115.

Zusatz. Die Entstehung ähnlicher mehrkantiger Prismen läßt sich auf gleiche Art leicht nachweisen.

§. 116.

Zusatz. Aehnliche prismatische Körper verhalten sich wie die Würfel ihrer homologen Seiten. Denn diese Körper lassen sich in gleich viele ähnliche dreyeckige Pyramiden zerlegen, welche in dem Verhältnisse der Würfel ihrer homologen Seiten stehen. Was aber von diesen einzelnen Elementen gilt, das hat auch von ihren Summen Statt.

Wäre z. B. (Fig. 54.) a f = 1/2 a b; a d = 1/2 a c, und a g = 1/2 a n, so würde Prisma a f d g m h = 1/8 Prisma a b c n o p seyn. Es ist eine lehrreiche Uibung für Anfänger, durch wirkliche Construction nachzuweisen, daß das größere Prisma durch 8 kleinere vollkommen ausgefüllt werden könne, was durch einige Hülfslinien leicht zu zeigen ist.

§. 117.

Aufgabe. Aehnliche Kegel und Cylinder zu construiren.

Auflösung. I. Wenn man den Kegel a f g (Fig. 55.) mit einer Ebene d h, parallel der Grundfläche, durchschneidet, so entsteht der kleine Kegel a d h, welcher dem größern a f g ähnlich ist.

Auch könnte die krumme Kegelfläche unterhalb der Grundfläche erweitert, und durch eine mit letzterer gleichlaufenden Ebene begrenzt werden.

II. Um einen Cylinder zu bilden, welcher dem gegebenen a c g f ähnlich ist, nehme man a b : a d = a c : a f, beschreibe um a b einen Kreis, welcher sich in paralleler Lage längs a d herabbewegt, so entsteht der Cylinder a b h d, welcher dem gegebenen ähnlich ist.

Auch könnte man die Linien a c und a f so verlängern, daß dieselbe den Theilen a c und a f proportional wären, und auf ähnliche Weise verfahren.

Beweis. Die Richtigkeit des Verfahrens beruht darauf, daß die Kegel wie pyramidalische, die Cylinder dagegen wie prismatische Körper von unzählig vielen Ecken betrachtet werden können.

§. 118.

Zusatz. Hieraus folgt ferner, daß auch ähnliche Kegel und Cylinder im Verhältnisse der Würfel ihrer homologen Linien stehen.

§. 119.

Zusatz. Ueberhaupt ist nunmehr der allgemeine Satz bewiesen:

Die Körperräume ähnlicher pyramidalischer und prismatischer Körper verhalten sich wie die Würfel von irgend einem Paare ihrer homologen Seitenlinien.

§. 120.

Lehrsatz. Die Kugeln stehen im geraden Verhältnisse der Würfel ihrer Durchmesser.

Beweis. I. Jede Kugel ist einer Pyramide gleich, deren Grundfläche die Kugelfläche und deren Höhe ihr Halbmesser ist. Denn man denke sich die Kugelfläche in eine sehr große Menge kleiner congruenter Vierecke getheilt und aus dem Mittelpunkte der Kugel nach ihren sämmtlichen Scheitelpunkten gerade Linien gezogen, so ist der Körperraum der Kugel der Summe aller dieser hierdurch entstehenden congruenten viereckigen Pyramiden gleich, deren gemeinsame Höhe der Radius bestimmt. Aber die Summe aller dieser Pyramiden ist einer einzigen Pyramide gleich, deren Grundfläche die Summe aller jener Grundflächen und deren Höhe der

Radius ist. Allein die Summe aller jener Grundflächen bildet die Oberfläche der Kugel. Folglich ist der Kugelraum der oben bemerkten Pyramide gleich.

II. Denkt man sich nun die kleinere Kugel dergestalt in der größern, daß ihre Mittelpunkte zusammenfallen und von den vier Winkelpunkten einer der vorbemerkten pyramidalischen Grundflächen vier Radien gezogen, so schneiden diese auch die Fläche der kleinern Kugel in vier Punkten und es entsteht in der kleinern Kugel eine vierseitige Pyramide, welche der zugehörigen Pyramide der größern Kugel ähnlich ist.

III. Diese beyde Pyramiden verhalten sich demnach wie die Würfel ihrer homologen Seitenkanten, d. h. wie die Würfel der Kugelhalbmesser. Da aber beyde Kugeln aus gleich viel solcher ähnlichen Pyramiden bestehen, so stehen auch die Kugelräume im geraden Verhältnisse der Würfel ihrer Halbmesser, oder auch, was Dasselbige ist, ihrer Durchmesser.

§. 121.

Zusatz. Verhielten sich daher die Durchmesser dreyer Kugeln wie 1 : 2 : 3, so wären ihre Körperinhalte wie 1 : 8 : 27.

§. 122.

Anmerkung. Aus dem Bisherigen ist demnach bewiesen, daß die Körperräume aller pyramidalischen, prismatischen und Kugelkörper, wenn sie unter sich ähnlich sind, in dem Verhältnisse der Würfel irgend eines Paares ihrer homologen Linien stehen.

Der

stereometrischen Wissenschaftslehre

dritter Cursus.

Stereometrische Berechnungen.

Dritter Cursus.

Stereometrische Berechnungen.

I.

Allgemeine Vordersätze.

§. 123.

Erklärung. Alle stereometrische Berechnungen beruhen darauf, daß man bestimmt, wie oft eine zur Einheit angenommene Körpergröße in einem gegebenen Körperraume enthalten ist. Jene Größe, welche man als Einheit zum Grunde legt, heißt das Maas; das Verfahren aber, wodurch bestimmt wird, wie oft dieses Maas in einer angegebenen Größe enthalten ist, wird Messen genannt.

§. 124.

Grundsatz. Aus dem Begriffe des Messens geht hervor, daß das Maas und die zu messende Größe gleichartig seyn müßen; denn das Maas muß als ein Theil der zu messenden Größe angesehen werden. Jedes Ganze aber ist mit seinen Theilen gleichartig.

§. 125.

Zusatz. Daher können Linien nur mit Linien, Flächen nur mit Flächen und Körper nur durch Körper gemessen werden.

§. 126.

Erklärung. Gleichwie der Längenfuß die Einheit für die Linienmessung, der Quadratfuß jene für die Flächenmessung ist, so wird der Cubikfuß, d. h. ein Würfel, dessen Seite ein Längenfuß ist, am Bequemsten zum Maaße der Körper gebraucht. Denkt man sich einen Würfel, dessen Seite ein Zoll ist, so nennt man ihn einen Cubikzoll, so wie der Würfel, dessen Seite eine Linie ist, Cubiklinie heißt. Hieraus ist verständlich, was man unter Cubikruthe, Cubikmeile, u. s. f. verstehe.

§. 127.

Erklärung. Bey dem stereometrischen Messen tritt die Verschiedenheit der zehn- oder zwölftheiligen Eintheilung des Fußes wieder hervor. Der zehnte Theil des Fußes wird ein Decimalzoll, dessen zwölfter Theil aber ein Duodecimalzoll genannt. Hieraus erkennt man, was eine Decimallinie oder eine Duodecimallinie sey. Da unsere Arithmetik auf dem decadischen Systeme beruht, so wird es auch für die Rechnungen der Stereometrie sehr erleichternd seyn, wenn man dieselbe nach der zehntheiligen Maasabtheilung ausführt.

§. 128.

Lehrsatz. Nach der Decimaleintheilung besteht der Cubikfuß aus ein tausend Cubikzollen.

Beweis. Es sey (Fig. 56.) ah der Cubikschuh. Man theile ab, ad und ac in zehn gleiche Theile und construire über den zehnten Theil, d. h. über ag, den Würfel an, so ist dieser ein Cubikzoll. Da nun zehn solcher Cubikzolle von a nach b, und ebenfalls zehn nach a nach d können gestellt werden, so ist klar, daß auf der Grundfläche abfd zehnmal zehn, d. h. hundert solcher Würfel Platz finden. Nun kann man aber auch von a nach c zehn solcher Würfel über einander stellen; folglich wird der ganze Cubikfuß von zehn Würfelschichten, deren jede hundert Cubikzolle enthält, d. h. von tausend Cubikzollen vollkommen ausgefüllt.

§. 129.

Zusatz. Auf gleiche Weise enthält die Cubikruthe tausend Cubikfuße, und ein Cubikzoll tausend Cubiklinien u. s. w.

§. 130.

Zusatz. Daher ist es leicht, irgend eine Menge von Cubikfußen in Cubikzolle zu verwandeln. Man darf nämlich jener Zahl nur drey Nullen zur Rechten anhängen. Fügte man noch drey Nullen bey, so würden die Cubikfuße in Cubiklinien verwandelt seyn, z. B. $86^{c\prime} = 86000^{c\prime\prime} = 86000000^{c\prime\prime\prime}$; oder

$24^{c0} = 24000^{c\prime} = 24000000^{c\prime\prime} = 24000000000^{c\prime\prime\prime}$ u. s. f.

§. 131.

Zusatz. Umgekehrt werden Cubiklinien in Cubikzolle, Cubikzolle in Cubikfuße, Cubikfuße in Cubikruthen verwandelt, wenn man mit 1000 dividirt. So ist z. B. $28376^{c\prime\prime} = 28^{c\prime}$ und $376^{c\prime\prime}$. Ferner $7146825138^{c\prime\prime\prime} = 7146825^{c\prime\prime}$ und $138^{c\prime\prime\prime} = 7146^{c\prime}$ und $825^{c\prime\prime}$ und $138^{c\prime\prime\prime} = 7^{c0}$ und $146^{c\prime}$ und $825^{c\prime\prime}$ und $138^{c\prime\prime\prime}$ u. s. w.

§. 132.

Zusatz. Nach dem Duodecimalmaaße enthält der Schuh zwölf Zolle. Daher kann die Grundfläche des Cubikfußes mit 12mal 12, oder mit 144 duodecimal Cubikzollen bedeckt werden, und der ganze Cubikfuß wird 144 mal 12 d. h. 1728 duodecimal Cubikzolle in sich fassen. Deßgleichen enthält nun auch ein duodecimal Cubikzoll 1728 duodecimal Cubiklinien u. s. f.

§. 133.

Zusatz. Sollen demnach duodecimal Cubikfuße in duodecimal Cubikzolle verwandelt werden, oder umgekehrt, so muß man in jenem Falle die Zahl der gegebenen duodecimal Cubikfuße mit 1728 multipliciren, in diesem aber die angegebenen duodecimal Cubikzolle mit 1728 dividiren.

Hieraus erhellet, daß diese Verwandlungen nicht so bequem sind, als jene, welche sich auf das Decimal-System gründen.

§. 134.

Zusatz. Um das zehntheilige Körpermaas mit dem zwölftheiligen, und dieses mit jenem zu vergleichen, bemerke man Folgendes. Wenn der zehntheilige Cubikzoll C, der zwölftheilige aber c heißt, so ist

$$1728\ c = 1000\ C,\ \text{folglich}$$

$$1{,}728\ c = C,\ \text{und}$$

$$\frac{1000}{1728}\ C = c = 0{,}\ 5787\ldots C$$

Um daher eine gegebene Menge von decimal Cubikzollen in duodecimal Cubikzolle zu verwandeln, multiplicire man ihre Zahl mit 1,728. Sollte aber irgend eine Menge von duodecimal Cubikzollen in decimal Cubikzollen ausgedrückt werden, so müßte man dieselbe mit dem Bruche 0,5787 multipliciren u. s. w.

II.

Berechnung der Körperräume.

§. 155.

Aufgabe. Den körperlichen Inhalt eines senkrechten Parallelopipedums zu berechnen.

Auflösung. I. Man messe Grundlinie und Höhe der Grundfläche, und die Höhe des ganzen Körpers mit dem Längenfuße, und wenn derselbe in jeder dieser drey Linien ohne Rest enthalten ist, so multiplicire man diese drey gefundene Maase mit einander. Das Product gibt den Inhalt des senkrechten Parallelopipedums in Cubikfußen. Es sey die Grundlinie = 5′, die Höhe der Grundfläche = 3′, die Kante des Körpers = 10′, so ist dessen Inhalt = 5 X 3 X 10 = 150c′.

II. Wenn diese drey Linien mit dem Fuße nicht genau können ausgemessen werden, so messe man dieselbe durch Zolle, oder, wenn der Inhalt des Körpers noch genauer gefunden werden sollte, durch Linien, und multiplicire die drey gefundenen Zahlen mit einander, so stellt das Product in jenem Falle die Zahl der Cubikzolle, in diesem aber die Zahl der Cubiklinien vor, welche der Körper enthält, und

welche man leicht in die höhern Cubikmaaßtheile, durch Division mit 1000, verwandeln kann.

III. Gewöhnlich pflegt man zu sagen, der Inhalt eines senkrechten Parallelopipedums sey einem Producte aus seiner Grundfläche in seine Höhe gleich. Da aber eine Fläche nicht mit einer Linie multiplicirt werden kann, so ist dieser Ausdruck nicht scharf genug bestimmt.

IV. Es ist zu rathen, daß man sich über obige Fälle an mehreren Beyspielen übe; was auch für alle folgende Berechnungen ein für allemal erinnert wird.

Beweis. Die Richtigkeit des Verfahrens beruht darauf, daß das senkrechte Parallelopipedum entweder durch Cubikfuße, oder durch Cubikzolle, oder durch Cubiklinien vollkommen, oder doch so ausgefüllt werden kann, daß der Fehler höchst unbedeutend ist.

§. 136.

Zusatz. I. Wenn die Grundfläche des senkrechten Parallelopipedums ein Quadrat ist, so braucht man nur die Seite dieses Quadrates und eine Kantenlinie zu messen und das Quadrat des Maases jener Linie mit dem Maase von dieser zu multipliciren.

II. Wäre das senkrechte Parallelopipedum ein Würfel, so brauchte man nur dessen eine Seite zu messen und ihr Maas zum Cubus zu erheben, um seinen Inhalt zu finden.

§. 137.

Aufgabe. Den Inhalt eines schiefen Parallelopipedums zu finden.

Auflösung. Man messe seine Grundfläche und multiplicire ihr Maas mit dem Maase der senkrechten Höhe des Körpers. Wenn diese Messung nicht ganz genau nach Fußen geschehen kann, so führe man sie in Zollen oder in Linien aus.

Beweis. Die Richtigkeit der Auflösung beruht darauf, daß, obschon das schiefe Parallelopipedum mit Cubikfußen, Cubikzollen, u. s. f. nicht genau ausgefüllt werden kann, sein Inhalt jenem eines senkrechten Parallelopipedums gleich ist, welches mit ihm Grundfläche und senkrechte Höhe gemein hat. Letzteres aber kann mit cubischen Maastheilen nach dem vorigen §. ausgefüllt werden. Indem man den senkrechten Körper mißt, wird daher auch der ihm dem Raume nach gleiche schiefe Körper gemessen.

§. 138.

Aufgabe. Den Körperinhalt eines jeden dreyeckigen Prisma zu finden.

Auflösung. I. Wenn das dreyeckige Prisma ein senkrechtes ist, so multiplicire man das Maas der Grundfläche mit dem Maase einer Seitenkante. Das Product gibt den verlangten Inhalt in Cubikmaaßtheilen.

II. Ist aber dieses Prisma ein schiefes, so wird das Maas seiner Grundfläche mit dem Maase seiner senkrechten Höhe multiplicirt.

Beweis. Die Auflösung gründet sich darauf, daß jedes dreyeckige Prisma die Hälfte eines Parallelopipedums von der nämlichen Höhe und von doppelter Grundfläche ist.

§. 139.

Zusatz. Da sich jedes vielseitige Prisma durch Diagonalflächen in so viele dreyeckige Prismen von derselbigen Höhe zertheilen läßt, als dasselbe Ecken hat weniger zwey, so wird dessen Inhalt gefunden, wenn man das Maas seiner gesammten Grundfläche mit jenem seiner senkrechten Höhe multiplicirt. Weil die Grundfläche ein Vieleck ist, so kann man sich bey ihrer Berechnung jener Vortheile bedienen, welche die Planimetrie für solche Fälle lehrt.

§. 140.

Aufgabe. Den Körperinhalt eines jeden Cylinders zu berechnen.

Auflösung. I. Wenn der Cylinder ein senkrechter ist, so berechne man seine Grundfläche und multiplicire ihr Maas mit dem Maase der Seitenlinie des Cylinders.

II. Ist aber der Cylinder schief, so wird das Maas der Grundfläche mit dem Maase seiner senkrechten Höhe multiplicirt.

Beweis. Da die Cylinder prismatische Körper von unzählig vielen Ecken sind, so beruht die Richtigkeit der Auflösung auf den vorigen §§.

§. 141.

Anmerkung. Aus dem Bisherigen ergeben sich folgende Formeln, als allgemeine Ausdrücke des Körperinhaltes prismatischer Körper.

I. Wenn man das Maas der Grundfläche eines dreyeckigen Prisma g, das Maas seiner senkrechten Höhe h nennt, so stellt $g \times h$ seinen Inhalt dar;

II. Wäre die Grundfläche eines Parallelopipedums ein Quadrat und dessen Seite dem Maase nach $= s$, die Höhe aber $= h$, so ist $s^2 \times h$ sein Inhalt.

III. Wenn die Seite eines Würfels $= s$, so ist dessen Inhalt $= s^3$

IV. Wenn der Halbmesser der Grundfläche eines Cylinders $= r$, das Maas seiner Höhe $= h$ und die Ludolphische Zahl, oder $\pi = 3,1415926 \ldots$ ist, so stellt $r^2 \pi \times h = 3,1415926 \ldots \times r^2 h$ seinen Inhalt vor.

§. 142.

Aufgabe. Jede dreyseitige Pyramide nach ihrem Inhalte zu berechnen.

Auflösung. Man multiplicire das Maas der Grundfläche mit dem Maase der senkrechten Höhe und dividire das Product durch 3;

oder man multiplicire 1/3 des Maases der Grundfläche mit dem Maase der Höhe;

oder man multiplicire 1/3 des Maases der Höhe mit dem Maase der Grundfläche.

Beweis. Die Richtigkeit dieser Vorschrift beruht darauf, daß jede dreyeckige Pyramide ein Drittheil jenes dreyeckigen Prisma ist, welches mit ihr Grundfläche und Höhe gemein hat. Daher muß der dritte Theil vom Inhalte des dreyeckigen Prisma der dreyeckigen Pyramide gleich seyn.

§. 143.

Zusatz. Da sich jede vieleckige Pyramide durch Diagonalschnitte in so viele dreyeckige zertheilen läßt, als ihre Grundfläche Seiten hat weniger zwey, so wird der Inhalt jeder vielseitigen Pyramide gefunden, wenn man das Maaß ihrer Grundfläche mit jenem ihrer senkrechten Höhe multiplicirt und ein Drittheil davon nimmt.

§. 144.

Aufgabe. Den körperlichen Inhalt des Kegels zu berechnen.

Auflösung. Das Maas der kreisförmigen Grundfläche mit dem Maase der senkrechten Höhe multiplicirt und davon ein Drittheil genommen, gibt den Körperinhalt des Kegels.

Beweis. Denn der Kegel gleicht einer Pyramide von unzählig vielen Ecken oder Seiten.

§. 145.

Anmerkung. Aus den vorigen §§. ergeben sich diese Formeln:

I. Wenn das Maas der Grundfläche einer Pyramide g, jenes seiner Höhe h heißt, so ist ihr Inhalt $= \frac{g \times h}{3} = 1/3\ g \times h = 1/3\ h \times g$.

II. Nennt man den Halbmesser der Grundfläche eines Kegels, seinem Maase nach, r, das Maas seiner senkrechten Höhe aber h, so ist dessen Inhalt $= r^2\, \pi \times 1/3\ h = 1/3\ \pi \times r^2 \times h = 1{,}0471975 \ldots \times r^2 \times h$.

§. 146.

Aufgabe. Den Körperinhalt der Kugel zu berechnen.

Auflösung. I. Wenn man sich einen Cylinder denkt, dessen Grundfläche der größte Kreis der Kugel, und dessen Höhe ihr Durchmesser ist, so wird, wenn der Kugel Halbmesser r heißt, dessen Inhalt $= r^2 \times \pi \times d$.

II. Da nun, nach dem Vorhergehenden, die Kugel zwey Drittheile dieses Cylinders beträgt, so ist ihr Inhalt $= 2/3\ r^2 \times \pi \times d = 2/3\ r^2\, \pi\, 2r = 4/3\ r^2\, \pi = 4/3\ \pi \times r^2 = r^2 \times 4{,}1887901 \ldots$

§. 147.

Aufgabe. Das Verhältniß zu finden, welches zwischen dem Würfel des Kugeldurchmessers und dem Inhalte der Kugel Statt findet.

Auflösung. Wenn man den Durchmesser der Kugel = 10 setzt, so ist dessen Würfel = 1000.

Da nun der Körperinhalt der Kugel $= 2/3 \times 5^2 \times 3{,}14 \times 10 = 2/3 \times 25 \times 31{,}4 = \frac{50 \times 31{,}4}{3}$ $= \frac{5 \times 314}{3} = \frac{1570}{3}$ ist, so verhält sich der Inhalt jenes Würfels zum Inhalte der Kugel wie 1000: $\frac{1570}{3}$, oder wie 3000: 1570, oder wie 300: 157.

§. 148.

Zusatz. Da dieses Verhältniß ein unveränderliches ist, so kann man sich dessen bedienen, um aus einem gegebenen Durchmesser den Inhalt der Kugel zu berechnen. Wenn d dieser Durchmesser ist, so wird der Inhalt der Kugel $d^3 \times \frac{157}{300}$. Man kann auch diesen gemeinen Bruch ein für allemal in einen Decimalbruch verwandeln, welcher sodann, als ständiger Factor, mit dem Würfel des Durchmessers multiplicirt werden muß, um ihren Inhalt zu finden.

§. 149.

Zusatz. Auch kann man durch dieses Verhältniß die Größe jener Seite eines Würfels finden, in welchen eine dem Inhalte nach gegebene Kugel beschrieben werden kann. Denn wenn man die Kugel K nennt, so ist 300: 157 $=$ d^3: K; folglich $d^3 = \frac{300\ K.}{157}$, folglich $d = \sqrt[3]{\frac{300\ K.}{157}}$

§. 150.

Zusatz. Aus dem Bisherigen ist es leicht, jedes Prisma oder jeden Cylinder, jede Pyramide und jeden Kegel, so wie auch jede Kugel durch Rechnung in einen ihnen gleichen Würfel zu verwandeln. Wenn man nämlich aus ihrem berechneten Inhalte die Cubickwurzel zieht, so stellt diese die Seite des zu findenden Würfels vor.

§. 151.

Aufgabe. Ein dreyeckiges Prisma ist durch eine Ebene geschnitten, welche schief gegen die Grundfläche geneigt ist. Man soll den Körperinhalt des hierdurch entstehenden Körpers finden.

Es sey (fig. 57.) a b c die Grundfläche eines dreyeckigen Prisma, welches durch die gegen die Grundfläche schief geneigte Ebene e f d geschnitten ist. Man soll den Inhalt des Körpers e f d a b c finden.

Auflösung und Beweis.

I. Wenn dieser Körper durch die Ebene f a c geschnitten wird, so entsteht die dreyseitige Pyramide f a b c und die vierseitige a e d c f, welche durch die Ebene e f c in die beyden dreyeckigen Pyramiden f a e c und f c d e getheilt wird.

II. Nimmt man von der Pyramide f a e c das Dreyeck a e c als Grundfläche an, so ist f ihre Spitze. Denkt man sich nun über eben diesem

Dreyecke a e c eine zweyte Pyramide, welche ihre Spitze in b hat, (wozu man die gerade Linie von e nach b denken muß,) so haben beyde Pyramiden, weil ihre Spitzen in der mit e a parallelen f b liegen, Grundfläche und Höhe, folglich auch den Inhalt gemein. Die Pyramide von der Grundfläche a e c und der Spitze b ist aber auch mit der Pyramide einerley, welche a b c zur Grundfläche und in e ihre Spitze hat.

III. Auf gleiche Weise findet man, daß die Pyramide f c d e gleich ist der Pyramide a f c d über der gemeinschaftlichen Grundfläche f c d d. h. gleich der Pyramide a b c d, welche a c d zur Grundfläche und b zur Höhe hat.

IV. Daher besteht der prismatische abgekürzte Körper aus drey Pyramiden, deren gemeinschaftliche Grundfläche das Dreyeck a b c, und deren drey Spitzen die Puncte f, e und d sind.

V. Wenn das durchschnittene Prisma senkrecht ist, so stellen dessen drey Seitenkanten die Höhen dieser drey Pyramiden vor, deren Summe nunmehr leicht zu berechnen ist.

§. 152.

Zusatz. Auch läßt sich auf diese Weise der Inhalt vier- und mehrkantiger Prismen, welche schief abgeschnitten sind, berechnen.

§. 153.

Aufgabe. Den Inhalt des schief abgekürzten senkrechten Cylinders zu finden.

Es sey (Fig. 58.) a b d c der senkrechte Cylinder, m n stelle den schiefen Durchschnitt vor; man soll den Inhalt des Körpers m n c d finden.

Auflösung und Beweis. Wenn der Schnitt m n so geschieht, daß b m = n c ist, so wird der ganze Cylinder in zwey congruente Theile zerlegt, und die Hälfte seines Inhaltes ist dem Stücke n m d c gleich. Indem nun bey jedem schief abgekürzten senkrechten Cylinder die zur Bildung des ganzen Cylinders fehlende Hälfte hinzugedacht werden kann, so ist dieses Stück jedesmal leicht zu berechnen. Weil nämlich das Maas der Grundfläche c d mit dem Maaße von o q multiplicirt, den Inhalt des halben Cylinders darstellt, so ist dies Product auch dem Körper n m d c gleich. Da man o q bey einem wirklichen Cylinderstücke nicht bequem messen kann, so nehme man $\frac{md + nc}{2}$ dafür.

§. 154.

Zusatz. Auch ist es hierdurch leicht, den Inhalt des Cylinder-Stücks zu berechnen, welches zwischen zwey schiefen Parallel-Ebenen enthalten ist. Es entstehen nämlich hierdurch zwey Körper wie n m d c, deren Differenz das verlangte Cylinderstück darstellt. Eine Formel dafür kann leicht gefunden werden.

§. 155.

Zusatz. Auf ähnliche Weise kann auch der Inhalt des durch einen schiefen Schnitt vom schiefen

Cylinder (Fig. 59.) abgeschnittenen Stückes berechnet werden, da a b c d = 1/2 m n c d ist.

§. 156.

Anmerkung. I. Es sey (Fig. 60.) a b c d ein schiefer Cylinder, welcher nach der Richtung c n, senkrecht auf dessen Seiten b c und a d, geschnitten wird, so ist die Durchschnittsfläche kein Kreis, sondern eine Ellipse. Wird nun das abgeschnittene Körperstück n c d gehörig auf die Oberfläche a b gestellt, so entsteht ein senkrecht = prismatischer Körper h b c n, welcher eine Ellipse zur Grundfläche, b c zur Höhe und mit dem schiefen Cylinder a b c d gleichen Inhalt hat. Benennt man den Kreis um d c mit K, die Ellipse um c n mit E, die Linie b c mit H, und das Loth b m mit h, wobey diese Buchstaben die Maase der genannten Größen bedeuten, so ist $K \times h = E \times H$, folglich $H : h = K : E$. Da aber das Dreyeck d c n dem Dreyecke c b m ähnlich ist, so verhält sich, wenn man c d = D und c n = d setzt, $H : h = D : d$; folglich ist auch $D : d = K : E$, oder auch, wenn man die zu D und d gehörigen Halbmesser R und r nennt, $R : r = K : E$. Da aber der Kreis mit $R = R^2 \times \pi$ ist, so ist $R : r = R^2 \times \pi : E$, woraus

$$E = \frac{r \times R^2 \times \pi}{R} = r\,R\,\pi$$

wird, wodurch der Flächeninhalt der Ellipse leicht berechnet werden kann, wenn man ihren kleinen und großen Durchmesser dem Maase nach kennt.

II. Da R r π die mittlere geometrische Proportionalgröße zwischen $R^2 \pi$ und $r^2 \pi$ ist, wie man daraus erkennt, daß $R^2 \pi : R r \pi = R r \pi : r^2 \pi$, so ist auch bewiesen, daß die Fläche einer Ellipse die mittlere geometrische Proportionalgröße zwischen den beyden Kreisflächen ist, welche um ihren größten und um ihren kleinsten Durchmesser beschrieben werden, da $R^2 \pi$ und $r^2 \pi$ diese Kreisflächen vorstellen.

§. 157.

Aufgabe. Wenn eine dreyeckige Pyramide parallel mit der Grundfläche durchschnitten wird, den Inhalt jenes Körpers zu finden, welcher zwischen den beyden ähnlichen Flächen und den drey Seitentrapezen enthalten ist.

Es sey (Fig. 61.) a q m g die gegebene Pyramide, welche von der Parallelebene b c d durchschnitten wird. Man soll den Körper b c d q m g berechnen.

Auflösung und Beweis.

I. Es sey a n die Höhe der ganzen Pyramide, a o aber jene der kleinen Pyramide a b c d, so ist klar, daß der zu berechnende Körper der Differenz jener beyden Pyramiden gleich ist, deren Inhalt von den Grundflächen q m g und b c d, und von den Höhen a n und a o abhängt.

II. Zieht man die geraden g n und d o, so ist
$ga : da = no + oa : oa$; allein
$ga : da = gm : dc$, folglich auch
$gm : dc = no + oa : oa$. Nun sey $gm = L$,
$dc = l$, $no = h$, $oa = x$, so ist
$L : l = h + x : x$, daher auch $Lx = lh + lx$,
und $Lx - lx = lh$, oder $(L - l)\,x = lh$,
folglich $x = \frac{lh}{L - l}$.

III. Nennt man nun die große Pyramide P, die kleine p, die große Grundfläche F, die kleine f, so ist $P = \frac{F}{3} \times (h + \frac{lh}{L - l})$, und $p = \frac{f}{3} \times \frac{lh}{L - l}$. Hieraus wird $P = \frac{F}{3} \times \frac{Lh - lh + lh}{L - l} = \frac{F}{3} \times \frac{Lh}{L - l}$ und $p = \frac{flh}{3L - 3l}$. Daher ist nun $P - p$, oder die abgekürzte Pyramide $=$
$\frac{FLh}{3L - 3l} - \frac{flh}{3L - 3l} = \frac{FL - fl}{L - l} \times \frac{h}{3}$.

Da nun jede dieser Größen gemessen werden kann, so gibt diese Formel den Inhalt der parallel abgekürzten Pyramide an. — Auch läßt sich aus L, l und F die Größe von f berechnen, da $L^2 : l^2 = F : f$, folglich $f = \frac{F \times l^2}{L^2}$ ist.

§. 158.

Aufgabe. Den körperlichen Inhalt eines parallel mit der Grundfläche abgekürzten Kegels zu finden.

Es sey (Fig. 49.) der Kegel a q m durch die Ebene b g parallel mit q m geschnitten. Man sucht den Körperinhalt des Stückes b g m q.

Auflösung und Beweis. Wenn man die im vorigen §. gefundene Formel für die parallel abgekürzte Pyramide, oder $\frac{FL - fl}{L - l} \times \frac{h}{3}$ auf das Kegelstück anwendet, worin R den Halbmesser der Grundfläche, r jenen der Oberfläche vorstellt, so wird der abgekürzte Kegel $= \frac{R^2 \pi R - r^2 \pi r}{R - r}$ $\times \frac{h}{3}$, worin h den Abstand der beyden Kreisflächen bedeutet. Reducirt man diese Formel, so wird sie $=$ $\frac{R^3 - r^3}{R - r} \times h \times \pi/3$. Führt man die Division des ersten Bruches wirklich aus und setzt statt π die zugehörige Zahl, so wird der abgekürzte Kegel $=$ $(R^2 + Rr + r^2)\, h \times 1{,}0471975 \ldots$ Da man die Halbmesser der Grundflächen und ihren Abstand von einander leicht messen kann, so läßt sich der abgekürzte Kegel nach dieser Formel bequem berechnen.

§. 159.

Aufgabe. Den Körperinhalt eines Kugel Stückes durch Rechnung zu finden, welches zwischen dem größten Kugelkreise und einem Parallelkreise mit ihm enthalten ist.

Es sey (Fig. 52) das Kugelstück zu berechnen, welches durch Umdrehung der Figur n o b c um die Achse n c entsteht.

Auflösung und Beweis. Nennt man c b $= R$, c n $= h$, so ist der durch das Rechteck n f b c erzeugte Cylinder $= R^2 \pi h$; der durch Umdrehung des rechtwinkeligen Dreyeckes h n c entstandene Kegel $= \frac{h^2 \pi h}{3} = \frac{h^3 \pi}{3}$. Da nun das Kugelstück, welches aus Umdrehung von n o b c entsteht, der Differenz des durch n f b c entstandenen Cylinders und des von h n c erzeugten Kegels gleich ist, so wird, wenn man jenes Kugelstück K nennt, $K = R^2 \pi h - \frac{h^3 \pi}{3} = (R^2 h - \frac{h^3}{3}) \pi = (R^2 - \frac{h^2}{3}) h \pi = (3 R^2 - h^2) \frac{h \pi}{3}$, nach welcher Formel dieses Kugelstück leicht zu berechnen ist. Auch kann man $\frac{\pi}{3}$ in einen Decimalbruch verwandeln, welcher sodann als beständiger Factor anzusehen ist.

§. 160.

Aufgabe. Den körperlichen Inhalt eines Kugelabschnitts zu berechnen.

Es sey (Fig. 52.) der durch Umdrehung der Figur m n o um die Linie m n entstehende Kugelabschnitt zu berechnen.

Auflösung und Beweis. Wenn man von dem Inhalte der Halbkugel das durch die Umdrehung

von n o b c entstandene Kugelstück abzieht, so muß der Inhalt des verlangten Abschnitts übrig bleiben. Nun ist aber der Inhalt der Halbkugel $= 2/3\ R^2 \pi R = R^3 \frac{2\pi}{3}$, jener des durch n o b c entstandenen Kugelstücks $= R^2 \pi h - \frac{h^3 \pi}{3}$; folglich wird der Abschnitt $= R^3 \times \frac{2\pi}{3} - R^2 \pi h + \frac{h^3 \pi}{3}$, oder $= \frac{2 R^3 \pi - 3 R^2 \pi h + h^3 \pi}{3} = (2 R^3 - 3 R^2 h + h^3) \frac{\pi}{3} = 1/3\ \pi (R - h)^2 \times (2 R + h)$ wie die wirkliche Multiplication von $(R - h)^2$ in $2 R + h$ lehrt. Folglich kann nach dieser Formel der Kugelabschnitt aus dem Halbmesser der Kugel und aus dem Abstande der Durchschnittsebene von ihrem Mittelpuncte leicht berechnet werden.

§. 161.

Zusatz. Wenn man den eben gefundenen Ausdruck $1/3\ \pi (R - h)^2 \times (2 R + h)$ genauer betrachtet, so stellt er den Körperinhalt eines Kegels dar, dessen Grundfläche $= (R - h)^2 \pi$ und dessen Höhe $= 2 R + h$ ist.

§. 162.

Zusatz. Durch Anwendung der zunächst vorhergehenden §. §. wird man auch im Stande seyn, den Körperinhalt eines Kugelstücks zu finden, welches

zwischen irgend zwey parallelen Durchschnittsebenen enthalten ist. Die Auffindung der Formel ist eine sehr nützliche Uibung für den Anfänger.

§. 163.

Aufgabe. Den Körperinhalt einer Kugelpyramide, d. h. eines Körpers zu finden, welcher entsteht, wenn sich ein spitzwinkeliger Ausschnitt des größten Kreises der Kugel um einen seiner Halbmesser als Axe beweget.

Es sey (Fig. 52.) v c m v der Kreisausschnitt, welcher sich einmal ganz und gar um die gerade Linie c m drehet, so entsteht eine Kugelpyramide, deren Grundfläche der von dem Bogen v m beschriebene Theil der Kugelfläche, und deren Höhe der Halbmesser der Kugel oder c m ist.

Auflösung und Beweis.

Wenn man die gerade Linie v o, welche auf c m lothrecht steht, zieht, so beschreibt das rechtwinkelige Dreyeck v n c bey dem Umdrehen einen senkrechten Kegel, die Figur v n m aber einen Kugel-Abschnitt, welche zusammengenommen die Kugelpyramide bilden. Nennt man nun c b $= r$, c n $= h$, so ist, nach dem Vorhergehenden, der Kugelabschnit $= (2 r^3 - 3 r^2 h + h^3) \frac{\Pi}{3}$. Da nun $no^2 = r^2 - h^2$ ist, so wird der Inhalt des senkrechten Kegels $= (r^2 - h^2)$

$\Pi \times \frac{h}{3} = (r^2 h - h^3) \frac{\Pi}{3}$. Folglich ist die Kugelpyramide

$$= (2 r^3 - 3 r^2 h + h^3) \frac{\Pi}{3} + (r^2 h - h^3) \frac{\Pi}{3} =$$

$$(2 r^3 - 2 r^2 h) \frac{\Pi}{3} = (2 r - 2 h) \frac{r^2 \Pi}{3} = 1/3 \times$$

$r^2 \Pi \times (2 r - 2 h)$, d. h. die Kugelpyramide ist einem Kegel gleich, dessen Grundfläche der größte Kreis der Kugel und dessen Höhe $= 2 r - 2 h = 2 (r - h) = 2 nm$ ist.

§. 164.

Zusatz. Die Kugelpyramide wächst und nimmt ab, wie der Factor $2 (r - h)$ größer oder kleiner wird. Für $h = r$, wird $2 (r - h) = 0$ und die Kugelpyramide selbst $= 0$. Für $h = 0$ aber wird sie $= 1/3 \; r^2 \Pi \times 2 r = 2/3 \; r^3 \Pi$, welches den Inhalt der Halbkugel amb darstellt.

§. 165.

Aufgabe. In dem Kreise mit dem Halbmesser cm (Fig. 62.) befinde sich das willkührliche Rechteck abgd. Es sey mf die Achse, um welche sich in der Entfernung na = hd der Kreisabschnitt aqd herumbewegt. Man soll den durch diesen Abschnitt erzeugten Körperraum berechnen.

Auflösung und Beweis. I. Es ist klar, daß man diesen Körperraum zur Differenz erhält, wenn von dem Inhalte der Kugel der Inhalt des durch n a d h erzeugten Cylinders und der Inhalt jedes der beyden durch a n m und d h f entstandenen Kugelabschnitte hinweggenommen wird.

II. Es sey daher c n = h, c m = r, so ist der Inhalt der Kugel $= 4/3\,\pi\, r^3$. Der Inhalt des Cylinders aber wird, da $mn = r - h$; $nf = r + h$ und $an^2 = mn \times nf = (r - h) \times (r + h) = r^2 - h^2$ ist, $= \pi\,(r^2 - h^2) \times 2h$.

III. Der Inhalt eines z. B. des von a n m erzeugten Abschnitts ist $= \frac{\pi}{3}(2r^3 - 3r^2h + h^3)$; folglich sind die beyden Abschnitte $= \frac{2\pi}{3}(2r^3 - 3r^2h + h^3)$.

IV. Nennt man nun den Inhalt des zu findenden Körpers K, so ist $K = \frac{4\pi}{3}r^3 - \pi\,(r^2 - h^2)\, 2h - \frac{2\pi}{3}(2r^3 - 3r^2h + h^3)$, oder

$$K = \frac{4\pi r^3}{3} - 2\pi h r^2 + 2\pi h^3 - \frac{4\pi r^3}{3} + 2\pi r^2 h - \frac{2\pi h^3}{3};$$

oder, wenn man die Glieder, welche sich gegenseitig aufheben, wegläßt, so wird $K = 4/3\,\pi\, h^3$, d. h. der Inhalt des zu berechnenden Körpers ist einer Kugel von dem Durchmesser 2 h gleich. Da nun 2 h = a d, so ist der von a q d erzeugte Körper der Kugel um a d gleich.

V. Je näher die Sehne a d gegen den Durchmesser m f rückt, desto größer wird der von dem Abschnitte a q d erzeugte Körper, bis a d selbst in m f fällt, wo durch Umdrehung des Halbkreises m q f die Kugel selbst entsteht.

VI. Umgekehrt wird der von a q d erzeugte Körperraum immer kleiner, je weiter sich a d von m f entfernet. Da man die Entfernungen bestimmen kann, in welcher a d = 1/2 m f, oder = 1/4 m f, oder = 1/8 m f u. s. f. wird, so ist der durch a q d entstehende Körper in diesen Lagen = 1/8, oder 1/64, oder 1/512 des ganzen Kugelraumes.

III.

Berechnung der Oberflächen.

§. 166.

Aufgabe. Die Seitenflächen aller senkrecht-prismatischen eckigen Körper zu berechnen.

Auflösung. I. Wäre die Grundfläche des senkrechten dreyeckigen Prisma ein gleichseitiges Dreyeck, so wären auch die drey Seitenflächen drey congruente Rechtecke. Man berechne daher eines derselben und multiplicire dessen Inhalt mit drey.

II. Ist das senkrechte Prisma ein vieleckiges, so hat es so viele Rechtecke zu Seitenflächen, als die Grundfläche Seiten hat. Da alle gleiche Höhe haben, so multiplicire man das Maas des Umfangs der Grundfläche mit dem Maase einer Seitenkante. Dieses Product gibt die Seitenfläche des Prisma.

III. Sind die gegebenen Prismen schief, so müßen ihre Seitenflächen einzeln berechnet werden. Doch tritt bey dem schiefen Parallelopipedum und auch bey einigen andern mehrseitigen Prismen der Fall ein, daß zwey gegenüberstehende Seitenflächen congruent sind, und daher nur einmal berechnet werden.

IV. Sollte man die gesammte Umfangsfläche dieser eckigen prismatischen Körper berechnen, so müßte man zu ihrer Seitenfläche noch den doppelten Inhalt ihrer Grundfläche addiren.

§. 167.

Aufgabe. Die Seitenfläche des senkrechten Cylinders zu berechnen.

Auflösung. Da dieser Cylinder einem senkrechten Prisma von unzählig vielen Seitenlinien gleich ist, so besteht seine Seitenfläche aus einer unendlichen Menge kleiner, unter sich congruenter Rechtecke, welche des Cylinders Seite zur gemeinschaftlichen Höhe haben. Die Summe dieser Rechtecke ist daher dem Producte aus dem Maaße dieser Höhe in das Maas ihrer gesammten Grundlinien gleich. Die Summe dieser Grundlinien ist aber die Peripherie der Grundfläche. Daher erhält man die Seitenfläche des senkrechten Cylinders, wenn das Maas der Peripherie seiner Grundfläche mit dem Maaße seiner Seite multiplicirt wird. Setzt man den Halbmesser der Grundfläche $= r$, des Cylinders Seite $= h$, so ist die krumme Seitenfläche $=$ $2 r \Pi h$.

§. 168.

Zusatz. Demnach ist die krumme Seitenfläche des senkrechten Cylinders einem Rechtecke gleich, dessen Grundlinie $= 2 r \Pi$, d. h. der Peripherie seiner Grundfläche, dessen Höhe aber $= h$, d. h. sei-

ner Seite gleich ist. Diese Wahrheit wird auch dadurch anschaulich, daß man den senkrechten Cylinder mit seiner Seite auf eine Ebene legt und auf derselben einmal ganz und gar herumbewegt, wodurch die krumme Cylinderfläche in dieser Ebene jenes Rechteck erzeugt.

§. 169.

Zusatz. Daher ist die Gesammtfläche des senkrechten Cylinders $= 2 r \Pi h + 2 r^2 \Pi = (h + r) 2 r \Pi$, d. h. die gesammte Grenzfläche des senkrechten Cylinders gleicht einem Rechtecke, dessen eine Seite $= h + r$, die andere aber $= 2 r \Pi$ ist.

§. 170.

Zusatz. I. Um den Halbmesser eines Kreises zu finden, welcher der krummen Seitenfläche des senkrechten Cylinders gleich ist, nenne man denselben x, so müßte $x^2 \Pi = 2 r \Pi h$, d. h. $x^2 = 2 r h$ seyn. Hieraus folgt, daß sich 2 r zu x, wie x zu h verhielte. Dieses heißt: der Halbmesser eines Kreises, welcher der Seitenfläche des senkrechten Cylinders gleich ist, ist die mittlere geometrische Proportionallinie zwischen dem Durchmesser der Grundfläche und seiner Höhe.

II. Wäre daher die Höhe dem Durchmesser gleich, so würde dieser Durchmesser als Halbmesser einem Kreise angehören, dessen Inhalt der krummen Cylinderfläche gleich wäre. Daher ist diese krumme Fläche

hier noch einmal so groß als die Grundfläche, d. h. so groß, als Grund- und Oberfläche zusammengenommen; und wenn man die Seite des senkrechten Cylinders dem Halbmesser seiner Grundfläche gleich macht, so ist dessen Seitenfläche seiner Grundfläche gleich.

§. 171.

Zusatz. Die krummen Seitenflächen zweyer senkrechten Cylinder, deren Halbmesser R und r, deren Seiten H und h heißen, stehen daher im Verhältnisse von $2 R H \pi : 2 r h \pi = R H : r h = D H : d h$, wenn D und d die Durchmesser ihrer Grundflächen sind, d. h. die Seitenflächen dieser Cylinder verhalten sich wie ihre Achsenschnitte.

§. 172.

Anmerkung. Die krumme Seitenfläche des schiefen Cylinders a b c d (Fig. 60.) zu berechnen, liegt ausser den Grenzen der Elementar-Geometrie. Wenn dieser Körper nach c n, senkrecht auf a d und c b, geschnitten und das Stück n c d in h b a gestellt wird, so ist der senkrechte Körper h b c n (wie schon im Vorhergehenden bemerkt worden) dem schiefen Cylinder a b c d gleich, so wie auch die Seitenflächen beyder Körper gleiche Größe haben. Man könnte daher die Seitenfläche des Körpers h b c n durch ein Rechteck ausdrücken, dessen Höhe b c und dessen Grundlinie die Peripherie der Ebene um c n wäre. Diese Ebene ist aber eine Ellipse,

deren Flächen-Inhalt leicht, deren Peripherie aber nur durch die höhere Analysis gemessen werden kann.

§. 173.

Aufgabe. Die Seitendreyecke der eckigen Pyramiden zu berechnen.

Auflösung. I. Wenn diese Pyramiden dreyeckige und senkrechte sind, so sind ihre drey Seitendreyecke unter sich congruent, und man braucht nur eines von ihnen zu berechnen.

II. Bey viereckigen senkrechten Pyramiden sind entweder die vier Seitendreyecke congruent, oder nur die zwey gegenüberstehenden sind es. In jenem Falle braucht man nur eines, in diesem nur zwey solcher Dreyecke zu berechnen.

III. Bey vielseitigen senkrechten Pyramiden muß man auf eben diese Bemerkungen Rücksicht nehmen. Denn entweder sind alle Seitendreyecke congruent, oder einige gegenüberstehende sind es.

IV. Sind aber die dreyeckigen Pyramiden schiefe, so müßen ihre Seitenflächen einzeln berechnet und addirt werden.

V. Um die Gesammtfläche dreyeckiger Pyramiden zu finden, muß man zu ihren Seitendreyecken den Inhalt der Grundfläche addiren.

§. 174.

Aufgabe. Die Seitenfläche eines senkrechten Kegels zu finden.

Auflösung. Da der senkrechte Kegel einer senkrechten Pyramide von unzählig vielen Seiten gleich ist, so kann man sich seine Seitenfläche als die Summe unzählig vieler Dreyecke denken, deren Grundlinien die unendlich kleinen Seiten der Grundfläche sind, und deren Höhe des Kegels Seite ist. Man findet aber den Flächeninhalt dieser Dreyecke, wenn das Maas ihrer sämmtlichen Grundlinien, d. h. das Maas der Peripherie der Grundfläche mit dem Maase der Seite des Kegels multiplicirt und halbirt wird. Daher stellt dieses halbirte Product auch die Seitenfläche des senkrechten Kegels vor. Setzt man den Halbmesser der Grundfläche $= r$, des Kegels Seite $= s$, so ist seine Seitenfläche $= 2 r \Pi \times 1/2 s = r \Pi s$.

§. 175.

Zusatz. Die Gesammtfläche des Kegels ist daher $= r^2 \Pi + r \Pi s = (r + s) \times r \Pi$, d. h. die gesammte Grenzfläche des senkrechten Kegels ist einem Rechtecke gleich, dessen Grundlinie $= r + s$, dessen Höhe $= r \Pi$ ist.

§. 176.

Zusatz. Um die Oberfläche eines Kreises zu finden, welcher mit obiger krummen Kegelfläche gleichen Inhalt hat, setze man ihren Halbmesser $= x$, so ist $x^2 \Pi = r \Pi s$, folglich $x^2 = r s$, woraus die Proportion $r : x = x : s$ folget. Das heißt: der Halbmesser des zu findenden Kreises ist

zwischen dem Halbmesser der Grundfläche und des Kegels Seite die mittlere geometrische Proportionallinie. Sie kann sowohl durch Verzeichnung, als durch Rechnung gefunden werden.

§. 177.

Zusatz. Die Seitenflächen zweyer senkrechten Kegel, deren Halbmesser der Grundfläche R und r, deren Seiten S und s sind, verhalten sich wie R S π : r s π d. h. wie R S : rs, d. h. wie ihre beyden Achsendreyecke.

§. 178.

Zusatz. Die Peripherie der Grundfläche eines senkrechten Kegels, deren Halbmesser r ist, wird, wenn seine Seite s heißt, = 2 r π; jene eines mit dem Halbmesser s beschriebenen Kreises aber = 2 s π. Folglich verhalten sich beyde Peripherien wie 2 r π : 2 s π. Man kann daher 2 r π als einen Theil von 2 s π ansehen, und wird, durch die Proportion 2 s π : 2 r π = 360° : x°, für x die Anzahl von Graden finden, welche die Kreislinie mit dem Halbmesser r von der Peripherie des mit s beschriebenen Kreises enthält. Da s immer größer als r seyn muß, so ist auch 2 s π jedesmal größer als 2 r π.

§. 179.

Zusatz. Wenn man den senkrechten Kegel in eine Ebene leget, so daß seine Seite ganz in dieselbe fällt, und denselben nunmehr um dessen unbewegliche

Spitze einmal ganz und gar herumbeweget, so beschreibt seine krumme Seitenfläche einen Kreisausschnitt, dessen Halbmesser die Seite des Kegels und dessen Bogen die Peripherie seiner Grundfläche ist. Da nun der Winkel dieses Ausschnittes der sovielte Theil von 360° ist, der wievielte Theil sein Bogen von der ganzen Kreislinie ist, zu welcher er gehört, so wird dieser Winkel durch das Verhältniß des vor. §. $2 s \pi : 2 r \pi = 360° : x°$ d. h. durch $s : r = 360° : x°$ gefunden.

Setzt man nun $s = 2 r$, so ist $s : r = 2 : 1$; folglich wird jetzt der Winkel des Ausschnittes $= 180°$.

Wäre $3 r = s$, so würde $s : r = 3 : 1$; und der Winkel des Ausschnitts würde $= \frac{360}{3} = 120°$.

§. 180.

Zusatz. Umgekehrt kann man einen gegebenen Kreisausschnitt in die Seitenfläche eines senkrechten Kegels verwandeln, dessen Seite dem Halbmesser dieses Ausschnittes gleich ist. In diesem Falle verhalten sich 360° zu den bekannten Graden des Ausschnitts, wie $s : r$, wo der Werth von r aus den drey bekannten ersten Gliedern leicht berechnet werden kann.

§. 181.

Anmerkung. Die Seitenfläche des schiefen Kegels überschreitet, obschon die Berechnung seines Inhaltes sehr einfach ist, die Grenzen der Elementargeometrie. Wenn man diesen Kegel mit seiner größten Seite in eine Ebene legt, und denselben zur Hälfte darin her-

umbewegt, so bildet seine halbe Seitenfläche in der Ebene eine Figur, welche von zwey geraden einen Winkel bildenden Linien und von einer dritten krummen Linie umschlossen ist. Den Inhalt dieser Fläche zu berechnen, ist eine Aufgabe für die höhere Geometrie.

§. 182.

Zusatz. Die Seitenfläche des senkrechten Cylinders verhält sich zur Seitenfläche des senkrechten Kegels, welcher mit ihm gleiche Grundfläche und Höhe hat, wie $2 r \Pi h : r \Pi s$, d. h. wie $2h : s$, wo h die Seite des Cylinders, r jene des Kegels bedeutet. Wäre $h = 1/2\ s$, so würde das Verhältniß der Seitenflächen das Verhältniß von $1 : 1$, d. h. wenn ein senkrechter Cylinder mit einem senkrechten Kegel gleiche Grundfläche, aber eine Höhe hat, welche der halben Seite des Kegels gleich ist, so ist die krumme Cylinderfläche der krummen Kegelfläche gleich. Für $h = 1/3\ s$ würde dieses Verhältniß $= 2/3 : 1$ u. s. w.

§. 183.

Zusatz. Die Gesammtfläche des senkrechten Cylinders verhält sich zur Gesammtfläche des senkrechten Kegels, wie $(h + r)\ 2 r \Pi : (r + s)\ r \Pi$, d. h. wie $2h + 2r : r + s$. Könnte $h = s$ seyn, so würde auch $2h + 2r = 2\ (r + s)$ seyn können. Nun muß aber s, unter obiger Voraussetzung, immer größer als h seyn. Daher kann die Gesammtfläche eines senk-

rechten Cylinders niemals das Doppelte der Gesammtfläche eines senkrechten Kegels werden, welcher mit ihm Grundfläche und Höhe gemein hat.

§. 184.

Aufgabe. Die Oberfläche der Kugel zu finden.

Auflösung und Beweis. Der Körperinhalt der Kugel ist, nach dem Vorhergehenden, einer Pyramide gleich, deren Grundfläche die Kugelfläche und deren Höhe ihr Radius ist; und der Inhalt einer Pyramide wird gefunden, wenn man das Maas ihrer Grundfläche mit dem dritten Theile des Maases ihrer Höhe multiplicirt. Daher muß man auch die Größe ihrer Grundfläche erhalten, wenn man den Inhalt der Pyramide mit dem dritten Theile ihrer Höhe dividirt. Dieses heißt mit andern Worten soviel, als: man erhält die Oberfläche der Kugel, wenn man ihren körperlichen Inhalt mit dem dritten Theile ihres Halbmessers dividirt. Ist der Radius der Kugel r, so wird ihr Inhalt

$$= 4/3\, r^3 \pi, \text{ und } 4/3\, r^3 \pi : 1/3\, r = \frac{4 r^3 \pi}{r} = 4 r^2 \text{ ist}$$

ist der Ausdruck für die Oberfläche der Kugel.

§. 185.

Zusatz. Da der Flächeninhalt des größten Kreises der Kugel $= r^2 \pi$ ist, so ist hierdurch der lehrreiche Satz bewiesen:

Die Oberfläche der Kugel ist dem Vierfachen ihrer größten Kreisfläche gleich.

§. 186.

Zusatz. I. Wenn man sich einen senkrechten Cylinder, dessen Grundfläche der Fläche des größten Kreises einer Kugel, und dessen Hohe ihrem Durchmesser gleich ist, vorstellt, so ist die krumme Seitenfläche dieses Cylinders $= 2r\pi \times 2r = 4r^2\pi$; folglich der Oberfläche der gegebenen Kugel gleich.

II. Die Gesammtfläche dieses Cylinders ist $= 4r^2\pi + 2r^2\pi = 6r^2\pi$, folglich anderthalbmal so groß als die Kugelfläche.

§. 187.

Zusatz. Wenn man den Radius einer größern Kugel R nennt, so verhalten sich ihre Oberflächen wie $4R^2\pi : 4r^2\pi$, d. h. $= R^2 : r^2$. Oder, die Oberflächen zweyer Kugeln stehen im geraden Verhältnisse der Quadrate ihrer Halbmesser.

§. 188.

Zusatz. Man kann daher folgende Verhältnisse bemerken, welche theils als Resultate der Planimetrie, theils als Sätze der Stereometrie nunmehr bewiesen sind:

I. Die Peripherien der größten Kreise zweyer Kugeln stehen im geraden Verhältnisse ihrer Halbmesser;

II. Die Flächenräume ihrer größten Kreise verhalten sich wie die Quadrate ihrer Halbmesser; endlich

III. Die körperlichen Räume derselben verhalten sich wie die Würfel ihrer Halbmesser.

Diese Verhältnisse kann man leicht durch Zahlen erläutern.

§. 189.

Zusatz. Da sich der Ausdruck für die Kugelfläche d. h. $4 r^2 \Pi$ in das Product aus $2 r$ in $2 \Pi r$ verwandeln läßt, so ist die Kugelfläche einem Rechtecke gleich, dessen eine Seite der Kugeldurchmesser, dessen andere der Umfang ihres größten Kreises ist.

§. 190.

Zusatz. Wollte man die Kugelfläche in eine ihr gleiche Kreisfläche verwandeln, und man setzte den unbekannten Halbmesser dieser Kreisfläche $= x$, so wäre $x^2 \Pi = 4 r^2 \Pi$, folglich $x^2 = 4 r^2$, oder $2 r : x = x : 2 r$, d. h. die Kugelfläche ist einem Kreise gleich, dessen Halbmesser der Durchmesser der Kugel ist.

§. 191.

Aufgabe. Die Seitenfläche einer abgekürzten Pyramide zu finden.

Auflösung. I. Wenn die Pyramide eine senkrechte und parallel mit der Grundfläche abgeschnitten ist, so lassen sich die Parallel-Trapeze, welche die Seitenflächen bilden, leicht berechnen; auch werden die gegenüberstehenden einander congruent seyn, wodurch die Rechnung abgekürzt wird.

II. Wenn eine senkrechte Pyramide durch einen schiefen Schnitt abgekürzt ist, so müssen die einzelnen

Seitenvierecke besonders berechnet und sodann addirt werden.

III. Wenn eine schiefe Pyramide parallel mit der Grundfläche durchschnitten wird, so müssen die Parallel-Trapeze der Seitenflächen ebenfalls einzeln berechnet und summirt werden.

IV. Wäre endlich eine schiefe Pyramide auch schief durchschnitten, so müßte man die Seitenvierecke durch schickliche Diagonalen in Dreyecke theilen, diese berechnen und sodann addiren.

V. Sollte man die Gesammtfläche solcher abgekürzten Pyramiden berechnen, so müßte man den Inhalt der Grundfläche und der Durchschnittsfläche noch besonders bestimmen und den Umfangsflächen beyfügen.

§. 192.

Aufgabe. Die Seitenflächen schief abgekürzter eckiger prismatischer Körper zu finden.

Auflösung. Da jede dieser Seitenflächen, wegen der parallel laufenden Seitenkanten, ein Parallel-Trapez bildet, so sind dieselbe auf diese Weise zu berechnen. Bisweilen wird die Rechnung dadurch abgekürzt werden, daß zwey gegenüberliegende Seitentrapeze congruent sind.

§. 193.

Aufgabe. Die Seitenfläche eines schief abgekürzten senkrechten Cylinders zu berechnen.

Es sey (Fig. 58.) die Seitenfläche des schief abgekürzten senkrechten Cylinders n m d c zu berechnen.

Auflösung. Wenn man c n über n verlängert, bis n a = d m, und d m über m verlängert bis m b = c n ist, und sodann den senkrechten Cylinder a b d c construirt, so ist klar, daß die krumme Fläche n m d c die Hälfte der krummen Seitenfläche des Cylinders a b d c ist. Nennt man daher m d = S, n c = s, so ist die krumme Seitenfläche des Cylinders a d =

$$2 r \Pi \times \frac{S + s}{2} = r \Pi \times (S + s),$$

d. h. man findet die Seitenfläche n m d c, wenn man die Summe der beyden Seiten m d und n c mit dem Umfange eines Kreises, welcher c q zum Durchmesser hat, multiplicirt.

§. 194.

Zusatz. Daher ist diese krumme Fläche einem Rechtecke gleich, dessen eine Seite die halbe Peripherie der Grundfläche c d, die andere aber der Summe von m d und n c gleich ist.

§. 195.

Zusatz. Um den Halbmesser eines Kreises zu finden, dessen Fläche der krummen Fläche n m d c gleich ist, setze man diesen zu findenden Halbmesser = x, so ist $x^2 \Pi = r \Pi \times (S + s)$, folglich $x^2 = r \times (S + s)$, woraus die Proportion $r : x = x : S + s$ folgt; d. h. der Halbmesser des zu findenden Kreises ist die mittlere geometrische Proportionallinie zwischen dem Halb-

messer der Grundfläche um cd und der Summe der Seiten md + nc.

§. 196.

Zusatz. Setzte man nc = s = o, so würde die krumme Fläche nmdc = r Π S; folglich wäre hier r : x = x : S, d. h. wenn der Schnitt der Ebene mn von m nach c ginge, so würde die krumme Fläche cmd einem Kreise gleich seyn, dessen Halbmesser die mittlere Proportionallinie zwischen dq und dm wäre.

§. 197.

Zusatz. Setzte man S = r, so würde in diesem Falle auch x (vor. §.) = r und die krumme Fläche wäre in diesem Falle der Grundfläche um cd gleich. Auf ähnliche Weise lassen sich andere bestimmte Verhältnisse auffinden.

§. 198.

Zusatz. Um jenen Theil der krummen Cylinderfläche zu finden, welcher zwischen zwey schiefen, unter sich parallelen Durchschnittsebenen enthalten ist, nehme man an, die zweyte Durchschnittsfläche liege zwischen mn und dc und die Buchstaben 𝔖 und 𝔰 entsprechen den Buchstaben S und s, so ist die zu findende Fläche = r Π (S + s) — r Π (𝔖 + 𝔰) = r Π (S + s) — (𝔖 + 𝔰) = r Π (S — 𝔖 + s — 𝔰) d. h. das zu findende Flächenstück ist einem Rechtecke gleich, dessen eine Seite die halbe Peripherie der Grundfläche um cd, die

andere aber die Summe aus den beyden Differenzen ist, welche entstehen, wenn man von den größern Seitenlinien des abgekürzten Cylinderstücks die ihnen entsprechenden kleinern hinwegnimmt.

Auch hier lassen sich noch mancherley Verhältnisse für besondere Fälle auffinden.

§. 199.

Aufgabe. Die Seitenfläche des parallel mit der Grundfläche abgekürzten senkrechten Kegels zu finden.

Auflösung. Wenn man von der Seitenfläche des größern Kegels jene des kleinern abzieht, so bleibt die Fläche des abgekürzten Kegels übrig. Nennt man daher die Halbmesser ihrer Grundflächen R und r, ihre Seiten S und s, so wird die zu findende Fläche $= R\pi S - r\pi s = (RS - rs)\pi$, nach welcher Formel einzelne Beyspiele leicht zu berechnen sind. Da sie indessen die Größe der Seiten S und s voraussetzt, welche, wenigstens nicht unmittelbar, gemessen werden können, so wird eine andere Formel, worin diese Linien nicht vorkommen, für das practische Messen um so wichtiger seyn, als man jedesmal im Stande ist, die Seite des abgekürzten Kegels zu messen.

§. 200.

Zusatz. Es ist $(RS - rs)\pi = (R + r) \times (S - s)\pi$. Denn $(R + r)(S - s) =$

$RS + Sr - Rs - rs$. Da nun $R : r = S : s$, so ist $Rs = rS$. Daher wird obiges Product $= RS - rs$. Folglich ist die Fläche des abgekürzten Kegels $= (R\pi + r\pi) S - s = (2R\pi + 2r\pi) \frac{S - s}{2}$, d. h. die krumme Fläche des abgekürzten Kegels ist einem Paralleltrapeze gleich, dessen eine Seite die Summe der halben Peripherien der Grund- und Oberfläche, und dessen andere Seite der halben Seitenlinie des abgekürzten Kegels gleich ist.

§. 201.

Zusatz. Man nenne $S - s = l$, so wird die Fläche des abgekürzten Kegels $= (R + r)\pi \times l$, d. h. diese krumme Fläche ist einem Rechtecke gleich, dessen Seiten die Linien $(R + r)\pi$ und l sind.

§. 302.

Zusatz. Die Gesammtfläche des abgekürzten Kegelstücks ist daher $= (R + r)\pi \times l + R^2\pi + r^2\pi = (R^2 + r^2 + Rl + rl)\pi$.

§. 203.

Zusatz. Um die krumme Seitenfläche des abgekürzten Kegels in einen ihr gleichen Kreis zu verwandeln, setze man den Halbmesser dieses Kreises $= x$, so wird $x^2\pi = (R + r)\pi \times l$; folglich $x^2 = (R + r) l$, d. h. $R + r : x = x : l$, d. h. der Halbmesser des zu findenden Kreises ist die mittlere Propor-

tionallinie zwischen der Summe der Radien der beyden Kreisflächen und der Seitenlinie des abgekürzten Kegels.

§. 204.

Zusatz. Nimmt man $R + r = l$, so wird auch $x = l$ und die Seitenfläche ist nun $= l^2 \pi$, d. h. dem Inhalte einer Kreisfläche gleich, dessen Halbmesser die Seite des abgekürzten Kegels ist. Auch kann man noch andere besondere Verhältnisse entwickeln.

§. 205.

Aufgabe. Die krumme Fläche, welche einen Kugelabschnitt begrenzt, zu berechnen.

Es sey (Fig. 52.) vo die schneidende Ebene und vmo der Abschnitt, dessen krumme Fläche zu berechnen ist.

Auflösung. I. Wenn man die geraden Linien vc und co zieht, so entsteht durch die Umdrehung des Ausschnitts vcm um cm eine Kugelpyramide, deren Grundfläche durch vmo vorgestellt wird. Diese Kugelpyramide ist einer Pyramide von ebener Grundfläche gleich, welche zur Basis die krumme Fläche vmo, zur Höhe aber den Radius cm hat. Wenn man daher den körperlichen Inhalt dieser Kugelpyramide durch den dritten Theil des Halbmessers dividirt, so erhält man das Maas ihrer Grundfläche, d. h. das Maas der krummen Fläche des Kugelabschnitts vmo. Dies gibt folgende Rechnung.

II. Die Kugelpyramide $= 2/3\, r^2 \pi\, (r - h)$; folglich ihre Grundfläche $= 2/3\, r^2 \pi\, (r - h) : r/3 = 2 r^2 \pi - 2 r h \pi$, d. h. diese krumme Fläche wird erhalten, wenn man von der Fläche der Halbkugel die Fläche eines Rechtecks abzieht, dessen Grundlinie der Peripherie des größten Kreises, dessen Höhe aber $= h$ ist; so, daß die Rechnung leicht auszuführen ist, wenn man das Maaß von r und h weiß.

§. 206.

Zusatz. Denkt man sich von m nach o die gerade Linie mo, so ist $mo^2 = mn^2 + no^2 = (r - h)^2 + r^2 - h^2$. Folglich wird die Fläche des mit dem Halbmesser mo beschriebenen Kreises $= \left((r - h)^2 + r^2 - h^2\right) \pi = (r^2 - 2 r h + h^2 + r^2 - h^2) \pi = (2 r^2 - 2 r h) \pi$. Hieraus folgt, daß der mit dem Halbmesser mo beschriebene Kreis der Fläche des Abschnitts vmo gleich ist.

§. 207.

Zusatz. Wenn der Abschnitt vmo bis zur Halbkugel amb anwächst, so wird die Fläche der Halbkugel der Fläche eines Kreises gleich seyn, dessen Halbmesser mb ist. Da nun dieser Kreis, weil $mb^2 = 2 cb^2$, der doppelten Kreisfläche mit dem Halbmesser cb, d. h. der doppelten Fläche des größten Kreises der Kugel gleich ist, so stimmt auch dieses Resultat mit dem frühern überein, nach welchem die ganze Kugelfläche dem Vierfachen des größten Kugelkreises gleich ist.

§. 208.

Zusatz. I. Setzte man $r = h$, so würde die Fläche des Abschnitts $= 2r^2 \Pi - 2r^2 \Pi = o$ seyn, welches auch aus der Natur der Sache hervorgeht; indem, wenn $cn = cm$ genommen wird, gar kein Kugelabschnitt mehr Statt findet.

II. Setzte man dagegen $h = o$, so würde die Fläche des Abschnitts $= 2r^2 \Pi$, welches auch mit der Anschauung auf das Genaueste übereinstimmt; denn wenn der Punct n nach c rückt, so wird aus dem Abschnitte vmo die Halbkugel amb, deren krumme Fläche bekanntlich $= 2r^2 \Pi$ ist.

§. 209.

Zusatz. Denkt man sich vom Mittelpuncte c eine gerade Linie gegen m, welche größer als cn ist, und cN heißen soll, und durch N einen Parallelschnitt mit vo, so entsteht zwischen beyden Parallelebenen ein Theil der Kugelfläche, welchen man eine Zone nennt. Es ist klar, daß die Fläche dieser Zone berechnet werde, wenn man von der Fläche des größern Abschnitts die Fläche des kleinern abzieht. Nennt man die Linie $cN = H$, so ist die krumme Fläche des größern Abschnitts $= 2r^2 \Pi - 2rh\Pi$; jene des kleinern aber $= 2r^2 \Pi - 2rH\Pi$; folglich wird ihr Unterschied, d. h. die Zone $= 2r^2 \Pi - 2rh\Pi - 2r^2 \Pi + 2rH\Pi = 2rH\Pi - 2rh\Pi = (H - h) 2r\Pi$. Dieses heißt: die Kugelzone ist der Seitenfläche eines senkrechten Cylinders gleich, dessen Grundfläche der größte

Kreis der Kugel, dessen Höhe aber der senkrechte Abstand der sie bildenden zwey Parallelflächen ist.

§. 210.

Zusatz. I. Alle Kugelzonen, welche aus Durchschnitten der nämlichen Kugel entstehen und gleiche Höhen haben, sind gleich an ihrer Seitenfläche. Denn jede von ihnen ist $= (H - h) 2 r \Pi$. Da nun der eine Factor $2 r \Pi$ eine unveränderliche Größe, d. h. der Umfang des größten Kugelkreises ist, so könnte die Veränderlichkeit des Productes nur von jener des andern Factors $H - h$ abhängen. Wenn daher $H - h$ immer gleich bleibt, d. h. wenn die Kugelzonen gleiche Höhen haben, so müssen sie auch gleiche krumme Flächenräume enthalten.

II. Nähme man zum Beyspiel $cn = mn$, so würde das Stück der Kugelfläche vmo der Zone avob gleich seyn, und jede dieser beyden Flächen wäre in diesem Falle der Fläche des größten Kugelkreises gleich.

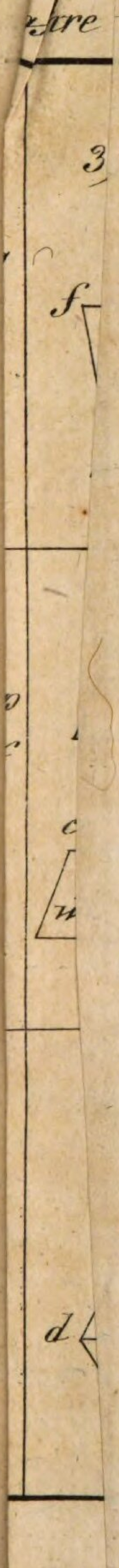
§. 211.

Zusatz. Eben so einfach folgt aus dem vor. §., daß zwey oder mehrere Kugelzonen von verschiedenen Höhen im geraden Verhältnisse dieser Höhen stehen. Denn alle diese Zonen haben den Factor $2 r \Pi$ gemein, und müssen daher, ihrer Größe nach, im geraden Verhältnisse der nunmehr veränderlichen Factoren $H - h$ stehen.

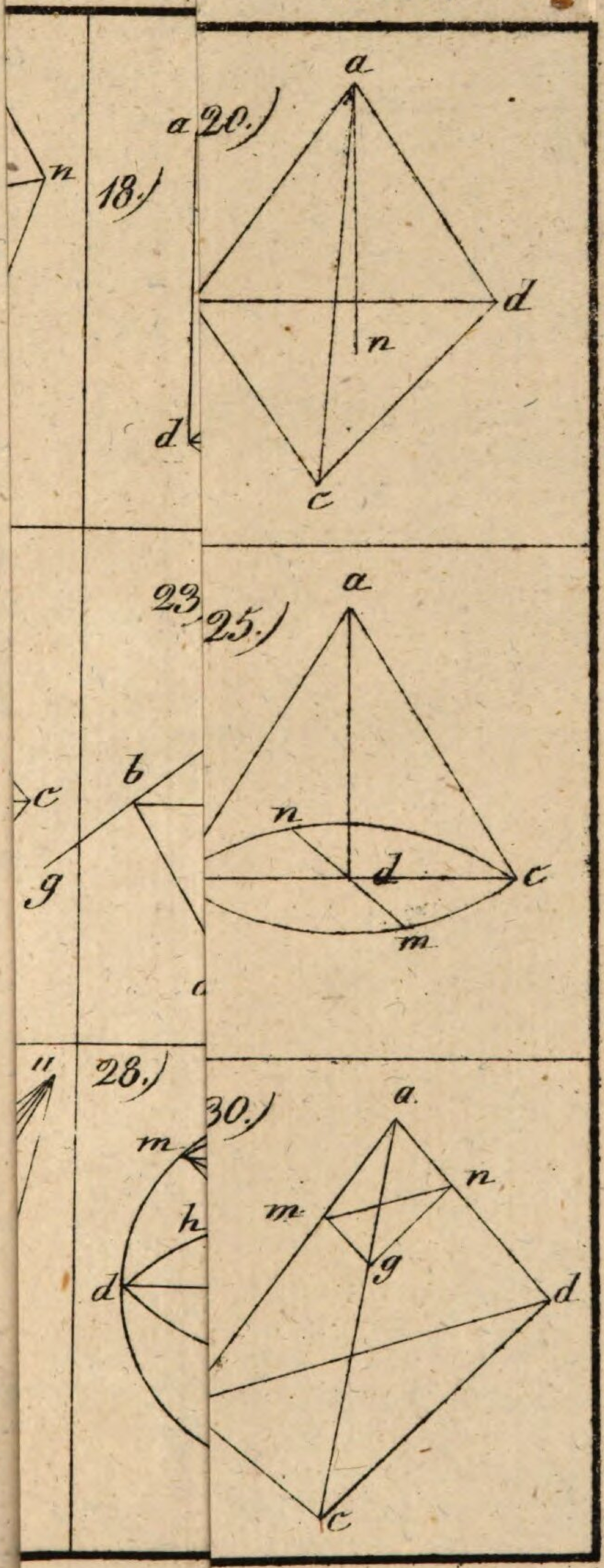
§. 212.

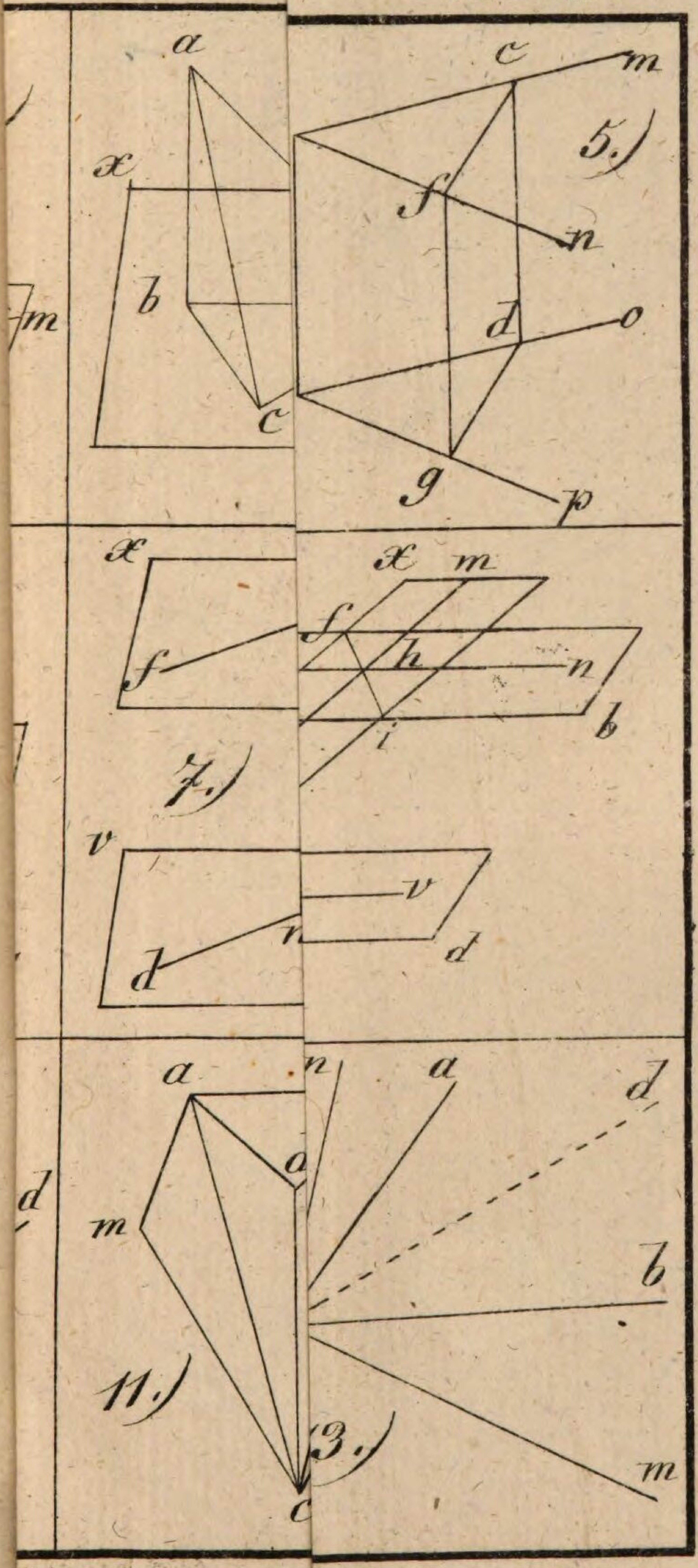
Zusatz. Schlüßlich geht noch aus dem Vorhergehenden nachfolgendes Resultat hervor:

Die Fläche jeder Kugelzone verhält sich zur Oberfläche der Kugel, wie sich die Höhe dieser Zone zum Durchmesser der Kugel verhält.

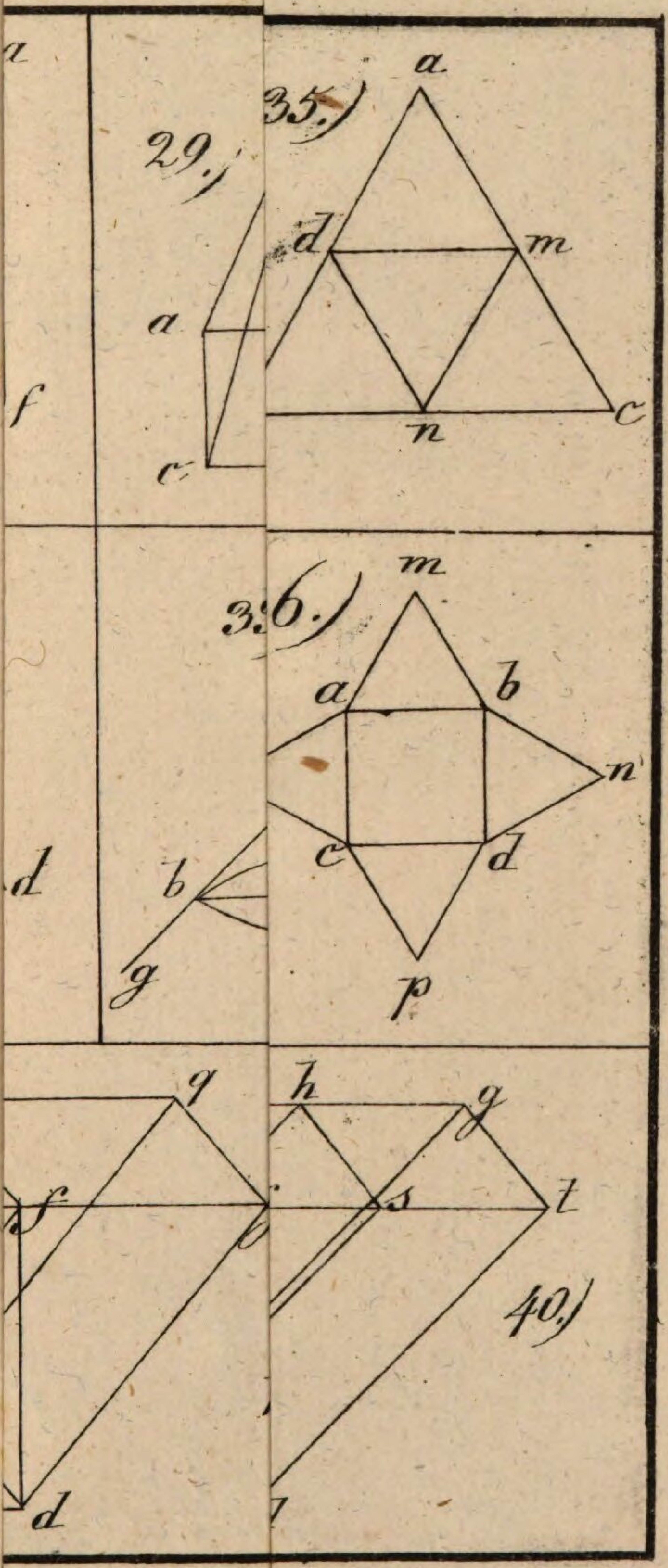


schauun Tafel II





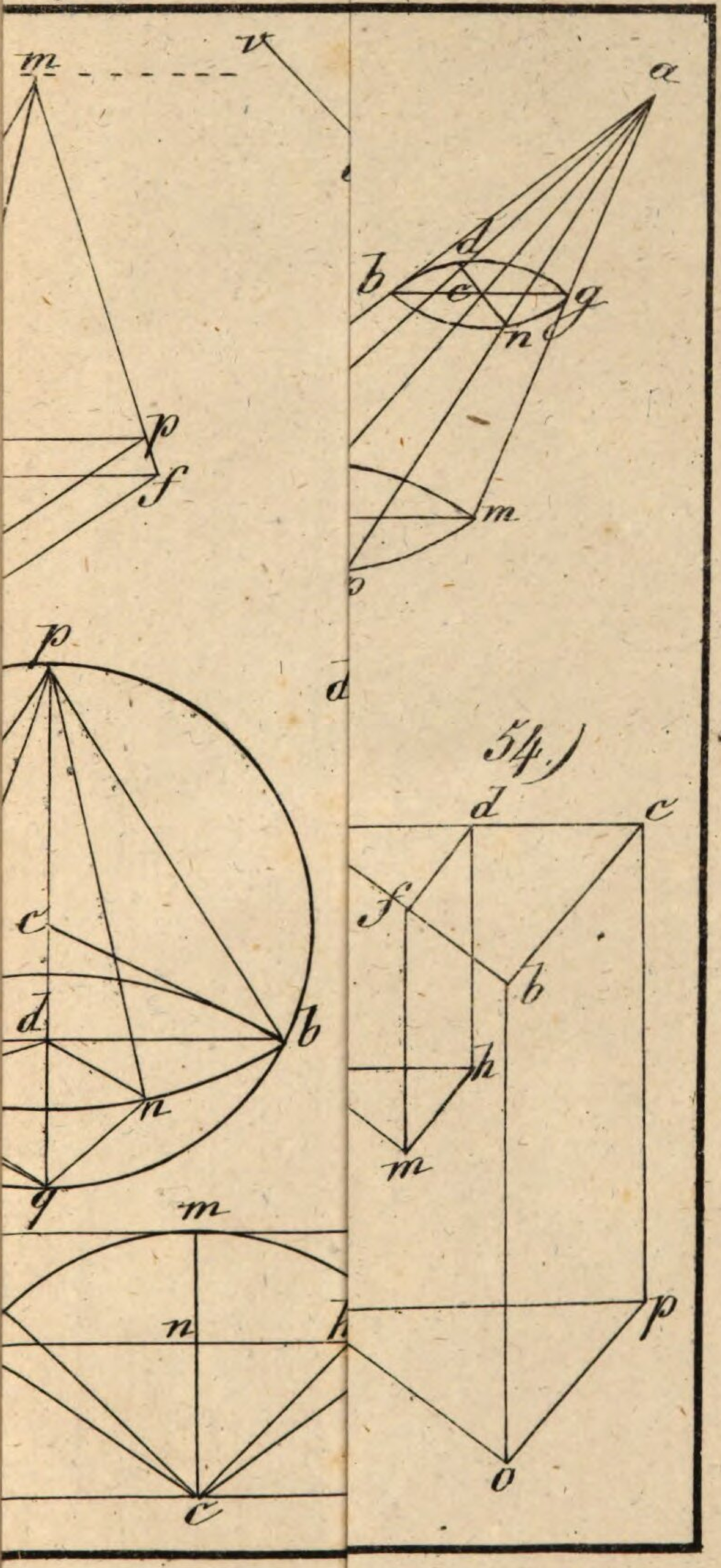
5.)
7.)
11.)
3.)


29.)
35.)
36.)
40.)
a
d
m
n
c
b
p
f
g
h
q
s
t

ftsle

chaftslehre vo

Tafel VII.



BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Hoffmann, Johann Josef Ignaz <<von>>,

Stereometrische Anschauungs- und Wissenschaftslehre eine Anleitung zum leichten und gründlichen Studium der Stereometrie

Mainz 1820

Math.p. 224 m
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082051-0